

ŒUVRES SCIENTIFIQUES

DE

L. LORENZ

REVUES ET ANNOTÉES

PAR

H. VALENTINER

PUBLIÉES AUX FRAIS DE LA FONDATION CARLSBERG

TOME PREMIER

COPENHAGUE

LIBRAIRIE LEHMANN & STAGE

BIANCO LUNO (F. DIEYER), IMPRIMEUR DE LA COUR

1898

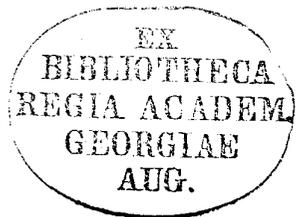


TABLE DES MATIÈRES DU PREMIER TOME.

- Détermination de la direction des vibrations de l'éther lumineux par la polarisation de la lumière diffractée, p. 1.
- Sur la réflexion de la lumière à la surface de séparation de deux milieux transparents et isotropes, p. 29.
- Détermination de la direction des vibrations de l'éther par la réflexion et par la réfraction de la lumière, p. 59.
- Sur la théorie de la lumière, p. 85.
- Sur la théorie de la lumière, p. 137.
- Sur l'identité des vibrations de la lumière et des courants électriques, p. 171.
- Recherches expérimentales et théoriques sur les indices de réfraction (premier mémoire), p. 211.
- Recherches expérimentales et théoriques sur les indices de réfraction (deuxième mémoire), p. 299 (supplément p. 360).
- Théorie de la dispersion, p. 369.
- Sur la lumière réfléchie et réfractée par une sphère transparente, p. 403.
-

NOTE 14. f_n doit s'évanouir à l'origine; car dans le cas contraire les fonctions ξ , η , ζ deviendraient infinies en ce point.

NOTE 15. On reconnaît immédiatement que l'on a $\varphi_0 = \frac{\sin ar}{a}$, $\psi_0 = \cos ar$, et les deux expressions de φ_1 et ψ_1 peuvent alors en être déduites au moyen des deux dernières formules (16). Ces formules donneront aussi des expressions analogues pour φ_n et ψ_n .

Sur

LA LUMIÈRE RÉFLÉCHIE ET RÉFRACTÉE

PAR UNE SURFACE TRANSPARENTE.

SUR LA LUMIÈRE RÉFLÉCHIE ET RÉFRACTÉE
PAR UNE SURFACE TRANSPARENTE.*

* NOTE 1.

VIDENSK. SELSK. SKR., T. VI (6). COPENHAGUE 1890.

Aussi longtemps que nous considérerons la lumière comme formée de rayons qui interfèrent, se réfractent et se réfléchissent à la surface des corps suivant certaines lois, notre conception du mouvement lumineux ne sera qu'élémentaire et fragmentaire, puisque par là nous décomposons la loi générale de ce mouvement en lois particulières et séparons des phénomènes qui sont essentiellement congénères. Cette manière de voir élémentaire a et aura cependant toujours une grande importance; mais tant que nous ne pourrons pas aller au delà, beaucoup de problèmes de l'optique resteront non résolus et insolubles.

La loi générale du mouvement de la lumière, de même que les lois de la propagation de l'électricité et de l'élasticité, est d'une forme simple, car elle peut être exprimée par trois équations linéaires aux dérivées partielles du deuxième ordre, où les trois composantes du mouvement vibratoire sont les variables dépendantes, les coordonnées de l'espace et le temps étant les variables indépendantes. Tous les problèmes de la propagation de la lumière doivent pouvoir être ramenés à l'intégration des ces équations.

Dans un mémoire intitulé „Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche“, M. A. Clebsch* a cherché à déterminer la réflexion de la lumière par des surfaces sphériques à réflexion totale en partant des équations différentielles de la théorie de l'élasticité; mais cet habile mathématicien n'a pas réussi à vaincre la difficulté principale proprement dite, et voici ce qu'il dit à ce sujet dans son introduction: „Die Resultate der ganzen Untersuchung sind sehr verwickelt, und namentlich für den in der Optik wichtigen Fall einer sehr kleinen Wellenlänge scheint es sehr schwer dieselbe einfach in passender Form darzustellen.“ Par cõntre, il ajoute: „Der entgegengesetzte Fall eines gegen die Wellenlänge sehr kleinen Radius der reflectirenden Kugel ist dagegen für eine Annäherung sehr geeignet.“

Les équations différentielles qui sont le point de départ des présentes recherches ont été exposées et établies dans plusieurs de mes travaux antérieurs. Elles se distinguent de celles de la théorie de l'élasticité en ceci, qu'elles excluent la possibilité de vibrations longitudinales, et comme elles sont applicables à chaque point de tout milieu transparent hétérogène, les conditions limites du passage d'un corps dans un autre se laisseront facilement déduire des équations différentielles elles-mêmes.

Dans un travail antérieur „Théorie de la dispersion“**, j'ai déduit des mêmes équations différentielles des formules qui servent à déterminer le mouvement de la lumière dans un milieu composé de couches sphériques concentriques, et j'ai alors appliqué le calcul à un système de petites sphères séparées par le vide et à de grandes distances les unes des autres, afin de déterminer

* Journal de Crellé, t. 61, p. 195. 1863.

** Voir le mémoire précédent.

la loi suivant laquelle la réfraction de la lumière dépend de la densité du système. Plus tard, je me suis servi des mêmes développements en séries pour résoudre le problème que j'ai ici en vue, à savoir la détermination du mouvement de la lumière lorsqu'une *sphère homogène, transparente et isotrope est éclairée par des ondes lumineuses planes et parallèles*, et j'ai réussi également par cette voie à obtenir les mêmes résultats qui vont être exposés ici. Mais j'ai préféré employer dans ce qui suit une autre méthode plus simple, qui me permettra en même temps, pour faciliter la lecture, de ne pas présumer la connaissance de mon premier travail.

1. Conditions aux limites.

Désignons par ξ , η , ζ les composantes des vibrations lumineuses, correspondant au temps t et aux coordonnées x , y , z de l'espace. Si l'on introduit en outre les notations

$$A_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

les lois du mouvement de la lumière dans un milieu transparent quelconque pourront être exprimées par les trois équations différentielles

$$\left. \begin{aligned} A_2 \xi - \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, & A_2 \eta - \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \\ A_2 \zeta - \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ω étant en général une variable dépendante de x , y , z , qui correspond à la vitesse de la lumière au point x , y , z , en tant qu'on peut considérer cette vitesse comme constante dans un très petit espace.

Le problème dont il s'agit consiste à intégrer ces équations, dans la supposition que ω a deux valeurs constantes dont l'une à l'intérieur et l'autre à l'extérieur d'une sphère donnée, et qui passent de l'une à l'autre par un changement discontinu à la surface de la sphère. Ce changement discontinu peut être regardé comme dû à ce qu'une couche superficielle passe, avec une variation continue de ω , d'une épaisseur finie à une épaisseur nulle, ω étant considérée comme une fonction de la distance r au centre de la sphère. Dans ce passage, les composantes du mouvement vibratoire doivent, ici comme partout, rester finies, tandis que leurs coefficients différentiels peuvent devenir infinis par rapport à r^* . C'est pourquoi les composantes et leurs coefficients différentiels, lorsque l'épaisseur de la couche limite est réduite à 0, passent en général brusquement d'une valeur à une autre en traversant cette couche; cependant quelques-unes de leurs combinaisons peuvent conserver leur valeur sans changement.

Pour chercher ces combinaisons, au lieu des composantes par rapport au système des axes fixes, je préfère employer la projection des vibrations sur le rayon, la projection perpendiculaire à cette dernière dans le plan passant par le rayon et l'axe des x , et la projection perpendiculaire aux deux précédentes et, par conséquent, à l'axe des x .

* NOTE 3. Si l'on exprime en coordonnées polaires*

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \varphi \sin \psi,$$

et si l'on désigne les nouvelles composantes par $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, celles-ci seront déterminées par les équations

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= \cos \varphi \xi + \sin \varphi \cos \psi \eta + \sin \varphi \sin \psi \zeta, \\ \bar{\eta} &= -\sin \varphi \xi + \cos \varphi \cos \psi \eta + \cos \varphi \sin \psi \zeta, \\ \bar{\zeta} &= -\sin \psi \eta + \cos \psi \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

En multipliant les équations (1) respectivement par x , y , z et en les ajoutant, on obtiendra

$$\Delta_2(r\bar{\xi}) - \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2\theta)}{\partial r} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2(r\bar{\xi})}{\partial t^2}; \quad * \text{ NOTE 4.}$$

d'où il suit que

$$\frac{\partial^2(r\bar{\xi})}{\partial r^2} - \frac{\partial(r^2\theta)}{\partial r},$$

lorsque Δ_2 est exprimé en coordonnées polaires, se laisse exprimer en termes qui restent finis*, même si l'épaisseur de la couche limite est réduite à zéro. * NOTE 5.

Mais il en résulte que

$$\frac{\partial(r\bar{\xi})}{\partial r} - r^2\theta$$

est une fonction continue, qui par suite reste aussi finie sur la surface limite, puisqu'elle est finie des deux côtés de celle-ci. Par conséquent

$$\frac{d\bar{\xi}}{dr} - \theta$$

est également partout une quantité finie.

Si l'on multiplie en outre les équations (1) respectivement par $-\sin \varphi$, $\cos \varphi \cos \psi$, $\cos \varphi \sin \psi$, et qu'on les ajoute, on obtient

$$\frac{\partial^2(r\bar{\eta})}{\partial r^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}$$

exprimé en termes qui restent partout finis. On trouve de même en multipliant les équations (1) par 0, $-\sin \psi$, $\cos \psi$ et en les additionnant

$$\frac{\partial^2(r\bar{\zeta})}{\partial r^2} - \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial\theta}{\partial\psi}$$

exprimé en termes partout finis.

Nous avons ainsi trouvé trois combinaisons qui sont partout finies. En éliminant θ , on voit que les expressions

$$\frac{\partial^2(r\bar{\eta})}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\bar{\xi}}{\partial\varphi\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2(r\bar{\zeta})}{\partial r^2} - \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial^2\bar{\xi}}{\partial\psi\partial r}$$

sont partout finies, d'où il suit que

$$\frac{\partial(r\bar{\eta})}{\partial r} - \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(r\bar{\zeta})}{\partial r} - \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\psi}$$

sont des fonctions continues qui ne changent pas en passant d'un des côtés de la surface limite de la sphère à l'autre. C'est ce que j'exprimerai par

$$\left[\frac{\partial(r\bar{\eta})}{\partial r} - \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\varphi} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial(r\bar{\zeta})}{\partial r} - \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\psi} \right] = 0. \quad (3)$$

Remarquons en outre que ces mêmes quantités, étant des fonctions continues et partout finies en dehors de la surface limite, doivent aussi être finies sur cette surface. Mais il en résulte que $r\bar{\eta}$ et $r\bar{\zeta}$ doivent être continus, de sorte qu'en conservant la même notation que ci-dessus, on aura

$$[\bar{\eta}] = 0, \quad [\bar{\zeta}] = 0. \quad (4)$$

On déduit les conditions aux limites correspondant à $r = 0$ et à $r = \infty$ en remarquant que le mouvement de la lumière est partout fini, par conséquent aussi pour $r = 0$, et qu'à une distance infinie de la sphère on ne trouve, outre la lumière incidente, que celle qui émane de la sphère, mais aucune qui se dirige vers elle.

2. Développement en séries de fonctions sphériques.

La lumière qui tombe sur la sphère est supposée formée d'ondes planes parallèles. Celles-ci peuvent en général renfermer un ensemble de vibrations qui diffèrent par leur amplitude, leur direction dans le plan des ondes, leur durée et leurs phases; mais ce cas général se laisse facilement déduire du cas particulier où les composantes du mouvement vibratoire, que nous désignerons par ξ_0 , η_0 , ζ_0 , sont déterminées hors de la sphère par

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = e^{k(t-Lr)^i}, \quad \zeta_0 = 0. \quad (5)$$

La forme exponentielle est choisie ici comme étant la plus simple; les vibrations qui ont l'amplitude 1 se font dans la direction de l'axe des y et se propagent dans la direction de l'axe des x avec la vitesse constante $\frac{k}{l} = \Omega$, la longueur d'onde $\frac{2\pi}{l} = \lambda$ et la durée $\frac{2\pi}{k} = T$.

Ayant ainsi, *en dehors* de la sphère, séparé la lumière incidente de celle qui est produite par le changement de vitesse à la surface de cette sphère, nous posons

$$\xi = \xi_0 + \xi_e, \quad \eta = \eta_0 + \eta_e, \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta_e, \quad (6)$$

tandis que, *en dedans* de cette surface, nous posons

$$\xi = \xi', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \zeta', \quad (7)$$

où ν' , Ω' , λ' remplacent aussi les quantités correspondantes non accentuées en dehors de la sphère. Si l'on désigne en outre le rapport des deux vitesses Ω , Ω' par N (indice de réfraction de la sphère), on aura

$$\Omega = N\Omega', \quad \nu^* = N\nu', \quad \lambda = N\lambda'. \quad (8) \quad \text{* NOTE 6.}$$

Les composantes ξ , η , ζ , tant en dehors qu'en dedans de la surface de la sphère, sont liées entre elles par

l'équation $\theta = 0$, qui pour ω constant résulte des équations (1), et par suite elles peuvent être regardées comme dépendant seulement de deux grandeurs Q et S en dehors de la sphère, ou Q' et S' en dedans de la sphère. On pourra en effet poser

$$\left. \begin{aligned} \xi_e &= \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \eta_e = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \zeta_e = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}, \\ A &= z \frac{\partial Q}{\partial y} - y \frac{\partial Q}{\partial z} + xS, \quad B = x \frac{\partial Q}{\partial z} - z \frac{\partial Q}{\partial x} + yS, \\ C &= y \frac{\partial Q}{\partial x} - x \frac{\partial Q}{\partial y} + zS, \end{aligned} \right\} (9)$$

et ξ' , η' , ζ' pourront aussi être exprimés d'une manière analogue. Les équations (1) seront alors satisfaites en supposant que l'on ait

$$* \text{ NOTE 7. } \quad \Delta_2 Q + l^2 Q = 0, \quad \Delta_2 S + l^2 S = 0^*, \quad (10)$$

$$\Delta_2 Q' + l^2 Q' = 0, \quad \Delta_2 S' + l^2 S' = 0. \quad (11)$$

Il est bon d'observer que les deux projections radiales

$$x\xi_e + y\eta_e + z\zeta_e$$

et

$$x \left(\frac{\partial \zeta_e}{\partial y} - \frac{\partial \eta_e}{\partial z} \right) + y \left(\frac{\partial \xi_e}{\partial z} - \frac{\partial \zeta_e}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \eta_e}{\partial x} - \frac{\partial \xi_e}{\partial y} \right)$$

peuvent, à l'aide des équations (9), être transformées en

$$* \text{ NOTE 8. } \quad -r^2 \Delta_2 Q + r \frac{\partial^2(rQ)}{\partial r^2} = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 Q}{\partial \psi^2}$$

et

$$-r^2 \Delta_2 S + r \frac{\partial^2(rS)}{\partial r^2} = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial \psi^2}.$$

On voit par là que, lorsque Q et S sont développées en séries de fonctions sphériques Q_n et S_n , à savoir

$$Q = \Sigma Q_n, \quad S = \Sigma S_n,$$

les projections radiales ci-dessus mentionnées seront déterminées respectivement par

$$\Sigma n(n+1)Q_n \quad \text{et} \quad \Sigma n(n+1)S_n.$$

On obtient un résultat analogue pour l'espace en dedans de la sphère.

Les composantes $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ introduites dans le chapitre précédent peuvent par analogie avec (6), pour des points en dehors de la sphère, être exprimées par

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_e, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_e, \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0 + \bar{\zeta}_e,$$

ces nouvelles composantes étant déterminées par

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}_0 &= \sin \varphi \cos \psi e^{(kt-lx)t}, \quad \bar{\eta}_0 = \cos \varphi \cos \psi e^{(kt-lx)t}, \\ \bar{\zeta}_0 &= -\sin \psi e^{(kt-lx)t}, \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}_e &= \cos \varphi \xi_e + \sin \varphi \cos \psi \eta_e + \sin \varphi \sin \psi \zeta_e, \\ \bar{\eta}_e &= -\sin \varphi \xi_e + \cos \varphi \cos \psi \eta_e + \cos \varphi \sin \psi \zeta_e, \\ \bar{\zeta}_e &= -\sin \psi \eta_e + \cos \psi \zeta_e. \end{aligned} \right\} (14)$$

Si maintenant, pour abrégé, on introduit dans ce qui suit les notations

$$lr = a, \quad l'r = a', \quad lQ = K, \quad l'Q = K' \quad (15) \quad * \text{ NOTE 9.}$$

et, R étant le rayon de la sphère donnée,

$$lR = a, \quad l'R = a', \quad (16)$$

on obtiendra par les équations (9) et à l'aide des équations (10) les valeurs suivantes

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}_e &= \frac{\partial^2(aK)}{\partial a^2} + aK, \\ \bar{\eta}_e &= \frac{1}{a} \frac{\partial^2(aK)}{\partial \varphi \partial a} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial S}{\partial \psi}, \\ \bar{\zeta}_e &= \frac{1}{a \sin \varphi} \frac{\partial^2(aK)}{\partial \psi \partial a} - \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right\} (17)$$

de même qu'on trouve pour un point intérieur les valeurs correspondantes

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}' &= \frac{\partial^2(a'K')}{\partial a'^2} + a'K', \\ \bar{\eta}' &= \frac{1}{a'} \frac{\partial^2(a'K')}{\partial \varphi \partial a'} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial S'}{\partial \psi}, \\ \bar{\zeta}' &= \frac{1}{a' \sin \varphi} \frac{\partial^2(a'K')}{\partial \psi \partial a'} - \frac{\partial S'}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Il s'agit maintenant de développer ces composantes en séries de fonctions sphériques. En général, lorsqu'une fonction $f(x)$ peut être ainsi développée, le développement est, comme on sait, de la forme

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{+1} f(u) P_n(u) du,$$

la somme étant prise pour toutes les valeurs de n depuis $n = 0$ jusqu'à $n = \infty$, et

$$P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right).$$

Si, à présent, nous cherchons à développer les valeurs que les équations (13) donnent pour $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$, $\bar{\zeta}_0$, en y posant $lx = a \cos \varphi$, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$e^{-a \cos \varphi i} = \sum_0^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \varphi) \int_{-1}^{+1} e^{-au} P_n(u) du.$$

L'intégrale définie que renferme cette équation peut s'exprimer par la fonction de Bessel $J_{n+\frac{1}{2}}(a)$, ou, ce que je préfère ici, par une autre fonction $v_n(a)$ qui ne diffère de celle de Bessel que par un facteur, la valeur en étant

$$v_n(a) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(a).$$

On pourra alors, d'après la théorie des fonctions de Bessel, exprimer $v_n(a)$ par

$$v_n(a) = \frac{a^{n+1}}{2^{n+1} n!} \int_{-1}^{+1} e^{-au} (1-u^2)^n du.$$

Cette intégrale devient par une intégration par parties n fois répétée

$$v_n(a) = \frac{a}{2^{n+1} n! i^n} \int_{-1}^{+1} e^{-au} \frac{d^n(1-u^2)^n}{du^n} du,$$

valeur qui, à l'aide d'une autre expression connue de P_n , à savoir

$$P_n(u) = \frac{(-1)^n d^n(1-u^2)^n}{2^n n! du^n},$$

peut aussi être mise sous la forme

$$v_n(a) = \frac{a}{2} i^n \int_{-1}^{+1} e^{-au} P_n(u) du. \quad (19)$$

De cette manière on obtient

$$e^{-a \cos \varphi i} = \frac{1}{a} \sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \varphi) e^{-\frac{n\pi}{2} i} v_n(a). \quad (20)$$

On remarquera que la fonction $v_n(a)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 v_n(a)}{da^2} = \left(\frac{n(n+1)}{a^2} - 1 \right) v_n(a), \quad (21)$$

et que, développée suivant les puissances de a , elle donne la série

$$v_n(a) = \frac{a^{n+1}}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} \left(1 - \frac{a^2}{2(2n+3)} + \frac{a^4}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} - \dots \right). \quad (22)$$

Un autre développement en série, connu par la théorie des fonctions de Bessel, et où le nombre des termes est fini, est le suivant*:

* NOTE 10.

$$\left. \begin{aligned} v_n(a) &= g_n(a) \sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right) + h_n(a) \cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right), \\ g_n(a) &= 1 - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4 a^2} + \frac{(n-3)(n-2) \dots (n+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 a^4} - \dots \\ h_n(a) &= \frac{n(n+1)}{2a} - \frac{(n-2)(n-1) \dots (n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 a^3} + \dots \end{aligned} \right\} (23)$$

Si l'on désigne en outre par $w_n(a)$ une autre intégrale particulière de l'équation (21), et si l'on définit cette intégrale par le développement en série

$$w_n(a) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{a^n} \left(1 + \frac{a^2}{2(2n-1)} + \frac{a^4}{2 \cdot 4 (2n-1)(2n-3)} + \dots \right), \quad (24)$$

cette fonction ne différera également d'une fonction de Bessel $J_{-\frac{n-1}{2}}(a)$ que par un facteur, et, avec les développements de g_n et de h_n donnés plus haut, elle pourra aussi être exprimée par

$$w_n(a) = g_n(a) \cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right) - h_n(a) \sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right). \quad (25)$$

Les valeurs données dans les équations (13) peuvent maintenant, à l'aide de la série (20), être déterminées comme il suit. On retire de cette série le premier terme correspondant à $n = 0$ et l'on pose

$$P_n(\cos \varphi) = -\frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \right),$$

ce qui donne

$$e^{-a \cos \varphi i} = \frac{\sin a}{a} - \frac{1}{a} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} \right) e^{-\frac{n\pi}{2} i} v_n(a).$$

En introduisant pour abrégier les notations

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= -i \frac{\cos \phi}{a} \frac{d}{d\phi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(\cos \varphi) e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} v_n(a), \\ S_0 &= -\frac{\sin \phi}{a} \frac{d}{d\phi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(\cos \varphi) e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} v_n(a), \end{aligned} \right\} (26)$$

la multiplication de l'équation par $\cos \phi e^{kti} \sin \phi d\phi$ ou par $-\sin \phi e^{kti} \sin \phi d\phi$ et l'intégration des deux équations ainsi obtenues de $\varphi = 0$ à $\varphi = \varphi$ donneront

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= -\frac{i \cos \phi}{a \sin \phi} (-\sin a \cos \varphi - i \cos a + i e^{-a \cos \varphi i}) e^{kti}, \\ S_0 &= -\frac{\sin \phi}{a \sin \phi} (-\sin a \cos \varphi - i \cos a + i e^{-a \cos \varphi i}) e^{kti}, \end{aligned} \right\} (27)$$

d'où l'on tire finalement

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2(aK_0)}{\partial a^2} + aK_0 &= \sin \phi \cos \phi e^{(kt - a \cos \varphi)i} = \bar{\xi}_0, \\ \frac{1}{a} \frac{\partial^2(aK_0)}{\partial \phi \partial a} + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial S_0}{\partial \phi} &= \cos \phi \cos \phi e^{(kt - a \cos \varphi)i} = \bar{\eta}_0, \\ \frac{1}{a \sin \phi} \frac{\partial^2(aK_0)}{\partial \phi \partial a} - \frac{\partial S_0}{\partial \phi} &= -\sin \phi e^{(kt - a \cos \varphi)i} = \bar{\zeta}_0. \end{aligned} \right\} (28)$$

Ces valeurs des composantes $\bar{\xi}_0$, $\bar{\eta}_0$, $\bar{\zeta}_0$ correspondent à celles qui sont données dans (17) pour les composantes $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, K_0 et S_0 remplaçant K et S dans les équations (17). Nous avons, dans (26), les développements de K_0 et S_0 en séries de fonctions sphériques, et, comme il est facile de s'en assurer, ils doivent satisfaire aux mêmes équations différentielles que K et S , à savoir, d'après (10), $\Delta_2 K_0 + l^2 K_0 = 0$, $\Delta_2 S_0 + l^2 S_0 = 0$. Les développements de K et de S en séries de fonctions sphériques doivent donc être analogues à ceux de (26), l'intégrale particulière $v_n(a)$ de l'équation (21) étant remplacée ici par l'intégrale générale exprimée linéairement en $v_n(a)$ et $w_n(a)$. On obtient ainsi, avec les constantes encore indéterminées k_n , x_n , s_n , σ_n *

* NOTE II.

$$\left. \begin{aligned} K &= -i \frac{\cos \phi}{a} \frac{d}{d\phi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} (k_n v_n(a) + x_n w_n(a)), \\ S &= -\frac{\sin \phi}{a} \frac{d}{d\phi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} (s_n v_n(a) + \sigma_n w_n(a)), \end{aligned} \right\} (29)$$

et d'une manière analogue pour un point intérieur

$$\left. \begin{aligned} K &= -i \frac{\cos \phi}{a'} \frac{d}{d\varphi} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} (k'_n v_n(a') + z'_n w_n(a')), \\ S &= -\frac{\sin \phi}{a'} \frac{d}{d\varphi} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} (s'_n v_n(a') + \sigma'_n w_n(a')). \end{aligned} \right\} (30)$$

$P_n(\cos \varphi)$ est réduit ici à P_n .

Si nous prenons d'abord la condition limite correspondant à $a' = 0$, on voit par (24) que $w_n(a')$ devient infini pour $a' = 0$ et $n > 0$, et, par conséquent, qu'il faut, pour que les valeurs de K' et S' soient finies, que

$$z'_n = 0, \quad \sigma'_n = 0.$$

A $a = \infty$ correspondent, d'après (23) et (25), $v_n(a) = \sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right)$, $w_n(a) = \cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right)$. A une distance infinie de la sphère, on doit donc avoir

$$2(k_n v_n(a) + z_n w_n(a)) e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} = (-k_n i + z_n) e^{(kt + a - n\pi)i} + (k_n i + z_n) e^{(kt - a)i}.$$

On voit par là qu'à cette distance le mouvement de la lumière se manifeste en général sous forme de fonctions périodiques de $kt + a$ et de $kt - a$, correspondant à deux mouvements opposés, l'un dirigé vers le centre de la sphère, l'autre partant du centre. Comme ce dernier mouvement, d'après les conditions que nous avons supposées, est le seul qui existe réellement, on doit avoir

$$-k_n i + z_n = 0, \quad \text{comme aussi} \quad -s_n i + \sigma_n = 0.$$

Les séries (29) et (30) se réduisent ainsi à

$$\left. \begin{aligned} K &= -i \frac{\cos \phi}{a'} \frac{d}{d\varphi} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} k_n (v_n(a) + w_n(a) i), \\ S &= -\frac{\sin \phi}{a'} \frac{d}{d\varphi} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} s_n (v_n(a) + w_n(a) i), \\ K' &= -i \frac{\cos \phi}{a'} \frac{d}{d\varphi} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} k'_n v_n(a'), \\ S' &= -\frac{\sin \phi}{a'} \frac{d}{d\varphi} \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} s'_n v_n(a'). \end{aligned} \right\} (31)$$

Enfin nous avons aussi les conditions aux limites exposées dans (3) et (4), qui peuvent être exprimées par

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta} &= \bar{\eta}', \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}', \\ \frac{\partial(\bar{a}\bar{\eta})}{\partial a} - \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial(a'\bar{\eta}')}{\partial a'} - \frac{\partial \bar{\zeta}'}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial(\bar{a}\bar{\zeta})}{\partial a} - \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \psi} &= \frac{\partial(a'\bar{\zeta}')}{\partial a'} - \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \bar{\zeta}'}{\partial \psi}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= a \\ a' &= a'. \end{aligned}$$

En y substituant les valeurs de $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ données par les équations (12), (17) et (28) et celles de $\bar{\xi}'$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\zeta}'$ données par (18), ces conditions peuvent être mises sous la forme

$$\left. \begin{aligned} a(K_0 + K) &= a'K', \\ \frac{1}{a} \frac{\partial \cdot a(K_0 + K)}{\partial a} &= \frac{1}{a'} \frac{\partial(a'K')}{\partial a'}, \quad \frac{S_0 + S}{\partial a} = \frac{\partial(a'S')}{\partial a'} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= a \\ a' &= a'. \end{aligned} \quad (32) *$$

* NOTE 12.

On y développe ensuite K_0 , S_0 , K , S , K' , S' suivant les séries (26) et (31), et on obtient ainsi quatre équations entre les coefficients. En désignant, pour abréger, les fonctions dérivées $\frac{dv_n(a)}{da}$, $\frac{dw_n(a)}{da}$, $\frac{dv_n(a')}{da'}$ par $v'_n(a)$, $w'_n(a)$, $v'_n(a')$, ces équations deviennent

$$\begin{aligned} N(v'_n(a) + k_n(v'_n(a) + w'_n(a)i)) &= k'_n v'_n(a'), \\ N(v_n(a) + s_n(v_n(a) + w_n(a)i)) &= s'_n v_n(a'), \\ v_n(a) + k_n(v_n(a) + w_n(a)i) &= k'_n v_n(a'), \\ v'_n(a) + s_n(v'_n(a) + w'_n(a)i) &= s'_n v'_n(a'), \end{aligned}$$

par lesquelles les coefficients peuvent être déterminés. En y faisant une petite réduction à l'aide de l'équation

$$* \text{ NOTE 13. } \quad w_n(a)v'_n(a) - w'_n(a)v_n(a) = 1, *$$

on obtient les valeurs suivantes

$$\left. \begin{aligned} 2k_n &= -1 - \frac{(v_n(a) - w_n(a)i)v'_n(a') - N(v'_n(a) - w'_n(a)i)v_n(a')}{(v_n(a) + w_n(a)i)v'_n(a') - N(v'_n(a) + w'_n(a)i)v_n(a')}, \\ 2s_n &= -1 - \frac{N(v_n(a) - w_n(a)i)v'_n(a') - (v'_n(a) - w'_n(a)i)v_n(a')}{N(v_n(a) + w_n(a)i)v'_n(a') - (v'_n(a) + w'_n(a)i)v_n(a')}, \end{aligned} \right\} (33)$$

$$\left. \begin{aligned} k'_n &= \frac{Ni}{(v_n(a) + w_n(a)i)v'_n(a') - N(v'_n(a) + w'_n(a)i)v_n(a')}, \\ s'_n &= \frac{Ni}{N(v_n(a) + w_n(a)i)v'_n(a') - (v'_n(a) + w'_n(a)i)v_n(a')}. \end{aligned} \right\} (34)$$

Le problème est par là résolu, en tant que les composantes du mouvement vibratoire sont partout dans l'espace déterminées par des séries infinies avec des coefficients connus. On verra que les séries, sous cette forme, se prêtent bien au calcul, si a , qui correspond au contour de la sphère mesuré avec la longueur d'onde λ , est un petit nombre, ou si le point considéré est situé près du centre, tandis que si a est un très grand nombre, ce qui est pour ainsi dire le cas avec toutes les sphères visibles à l'œil nu, il sera en général nécessaire de transformer les séries de manière que les sommations puissent se faire avec une approximation suffisante. Je vais maintenant exposer d'abord les formules de sommation que j'aurai l'occasion d'employer.

3. Formules de sommation.

On trouvera dans le chapitre suivant des sommes qui peuvent être rapportées à la forme

$$\sum_{n_1}^{n_2} A_n e^{F_n i} \quad (35)$$

où n passe par toutes les valeurs entières comprises entre n_1 et n_2 .

Les deux fonctions A_n et F_n sont telles que, si l'on y fait $n = \nu + z$, ces deux nouvelles variables étant également considérées comme des nombres entiers, on obtient les séries suivantes, qui sont convergentes dans les limites données:

$$A_n = A + B \frac{z}{a} + C \frac{z^2}{a^2} + \dots, \quad F_n = Fa + Gz + H \frac{z^2}{a} + I \frac{z^3}{a^2} + \dots \quad (36)$$

Les termes sont ici rangés suivant les puissances croissantes de z et les puissances décroissantes de la grandeur a . Celle-ci est regardée comme un nombre *très grand*, mais non infiniment grand, et, dans ce qui suit, toutes les grandeurs seront rangées suivant les puissances de a , de manière que celle qui renferme une puissance supérieure de a sera considérée comme une grandeur d'un ordre supérieur. Les coefficients A, B, \dots, F, G, \dots sont ici *au plus* des grandeurs du même ordre que l'unité (a^0). Le calcul aura en vue de présenter les résultats avec une exactitude telle que les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité seront seules regardées comme assez petites pour pouvoir être négligées.

Le nombre des termes de la série (35) est lui-même très grand et du même ordre que a . Les limites n_1 et n_2 sont *indéterminées et jusqu'à un certain degré arbi-*

traies, dépendant seulement, d'une part, des conditions de convergence des séries (36) et, de l'autre, de la condition que $n_2 - n_1$ doit être un nombre très grand. Ces grandeurs indéterminées et arbitraires que j'introduis ici, et pour lesquelles je me servirai dans ce qui suit de la désignation commune ω , sont définies par ce caractère qu'une fonction d'une pareille grandeur marque la limite vers laquelle converge la valeur moyenne de la même fonction d'une grandeur déterminée x , lorsqu'on fait passer x par une série de plus en plus grande de valeurs dans les limites tracées pour ω .

Ainsi, si nous partons des intégrales connues

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu), \quad (37), \quad \int_0^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu) e^{\frac{\mu\pi}{2}i}, \quad (38)$$

dont la première s'applique à toutes les valeurs positives de μ , et la seconde seulement aux valeurs positives plus petites que 1, on voit que pour $\mu < 1$ on doit aussi avoir

$$\int_0^{\omega} e^{xi} x^{\mu-1} dx = \Gamma(\mu) e^{\frac{\mu\pi}{2}i}, \quad (39)$$

puisque

$$\int_0^{\omega} e^{xi} x^{\mu-1} dx = \int_0^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx - \int_{\omega}^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx, \quad *$$

* NOTE 14.

où la dernière intégrale peut être développée par intégration partielle en une série semi-convergente dont la valeur moyenne, correspondant à différentes valeurs de ω , converge vers 0, lorsque la valeur moyenne est prise de la manière indiquée plus haut, dans des limites de plus en plus larges. Si en outre μ est plus grand que 1 dans l'intégrale (39), cet exposant peut par intégration partielle devenir plus petit que 1, et la valeur moyenne des termes périodiques en dehors de l'intégrale convergera également vers 0.

Par conséquent, l'équation (39), avec la portée donnée à la limite supérieure de ω , s'applique à toutes les valeurs positives de μ .

Comme autre exemple, qui trouvera une application dans ce qui suit, nous pouvons prendre la somme (35) réduite à sa forme la plus simple

$$\sum_{n_1}^{n_2} e^{ani} = \frac{e^{an_1 i} - e^{a(n_2+1)i}}{1 - e^{ai}}. \quad *$$

* NOTE 15.

Le second membre doit également disparaître ici, si a n'est pas nul ni un multiple de 2π , car alors la somme devient $n_2 - n_1 + 1$, qui est bien indéterminée, mais en tout cas ne peut devenir nulle. De plus, si a est très petit ou très voisin d'un multiple de 2π , on ne saurait non plus regarder la somme comme nulle, car le nombre des termes est bien supposé très grand, mais non infiniment grand.

Si la somme est nulle, elle continuera aussi à l'être si on la différencie un nombre arbitraire de fois par rapport à a . On aura donc plus généralement

$$\sum_{n_1}^{n_2} n^m e^{ani} = 0, \quad (40) \quad * \text{ NOTE 16.}$$

si m est un nombre entier ou nul et si a n'est pas nul ni très voisin de 0 ou d'un multiple de 2π .

Si nous considérons maintenant la somme donnée par les développements (35) et (36), on voit qu'elle peut être transformée en une série convergente avec des termes qui, en laissant de côté les facteurs constants, ont la forme

$$\sum_{n_1-\nu}^{n_2-\nu} z^m e^{Gzi}.$$

Par conséquent, si l'on ne peut avoir

$$G = 2p\pi, \quad (41)$$

pour $p = 0$ ou un nombre entier, et que $G - 2p\pi$ ne soit pas non plus très voisin de 0, la somme (35) disparaîtra en entier.

Est-on, au contraire, à même de trouver une valeur de ν qui permette de satisfaire à la condition ci-dessus (41), Gz peut alors être omis dans l'exposant, et la sommation être remplacée sans erreur sensible par une intégration. La somme (35) pourra donc prendre la forme

$$\int_{-(\nu-n_1)}^{n_2-\nu} dz \left(A + B \frac{z}{a} + \dots \right) e^{(Fa + H \frac{z^2}{a^2} + I \frac{z^3}{a^3} + \dots)i}, \quad (42)$$

où nous nous bornerons à supposer ν compris entre n_1 et n_2 de manière à faire rentrer $\nu - n_1$ et $n_2 - \nu$ dans le genre de grandeurs indéterminées défini plus haut. Si, dans cette intégrale, on change le signe de z pour $z < 0$, et qu'on pose ensuite $H z^2 = ax$, les limites de x , H n'étant ni nul ni très petit, rentreront dans les grandeurs comprises sous la désignation commune ω , et, par le développement en série, l'intégrale prendra la forme

$$\int_0^\omega \frac{dx}{2} \left(A \sqrt{\frac{a}{Hx}} + \frac{B}{H} + \dots + \frac{A I x i}{H^2} + \dots \right) e^{(Fa + x)i} \\ + \int_0^\omega \frac{dx}{2} \left(A \sqrt{\frac{a}{Hx}} - \frac{B}{H} + \dots - \frac{A I x i}{H^2} + \dots \right) e^{(Fa + x)i}.$$

Comme on a $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, ces intégrales, en vertu de (39), deviendront finalement

$$A \sqrt{\frac{a\pi}{H}} e^{(Fa + \frac{\pi}{4})i}, \quad (43)$$

les termes du même ordre que $a^{-\frac{1}{2}}$ et d'un ordre inférieur étant négligés. Ce résultat est également valable pour les valeurs négatives de H si l'on a soin de poser

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Il cesse de l'être pour

$$H = 0.$$

Dans ce cas, nous pouvons, pour le généraliser davantage, supposer que $G - 2p\pi$ est une grandeur très petite; alors la sommation pourra aussi être remplacée par une intégration, et, au lieu de (42), on obtiendra l'intégrale suivante

$$\int_{-(\nu-n_1)}^{n_2-\nu} dz \left(A + B \frac{z}{a} + C \frac{z^2}{a^2} + \dots \right) e^{(Fa + (G-2p\pi)z + I \frac{z^3}{a^3} + K \frac{z^4}{a^4} + L \frac{z^5}{a^5} + \dots)i}. \quad (45)$$

Changeons-y également le signe de z pour $z < 0$, et posons ensuite $\pm Iz^3 = a^2 x^*$, le double signe étant déterminé de manière que $\pm I$ soit positif. En introduisant, pour abrégé, les notations

$$G - 2p\pi = -\varepsilon \sqrt{\frac{I}{a^2}}, \quad (46)$$

$$Q = \int_0^\omega x^{-\frac{2}{3}} \cos(-\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x) dx \quad (47)$$

et

$$A = A_1 I, \quad B = B_1 I, \quad C = C_1 I, \quad K = K_1 I \quad \text{et} \quad L = L_1 I, \quad (48)$$

on pourra sans difficulté donner à l'intégrale (45) la forme

$$\pm \frac{2}{3} e^{Fai} \left[(aI)^{\frac{2}{3}} A_1 Q + (aI)^{\frac{1}{3}} i \left(B_1 \frac{dQ}{d\varepsilon} + A_1 K_1 \frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2} \right) - C_1 \frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2} - (A_1 L_1 + B_1 K_1) \frac{d^3 Q}{d\varepsilon^3} - \frac{1}{2} A_1 K_1^2 \frac{d^4 Q}{d\varepsilon^4} \right], \quad (49)$$

les termes de l'ordre de $a^{-\frac{1}{3}}$ et au-dessous étant négligés.

Dans le cas où $\varepsilon = 0$, on obtient à l'aide de (39)

* NOTE 18.
$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} = Q = -3 \frac{d^3 Q}{d\varepsilon^3}, \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} = \frac{dQ}{d\varepsilon} = -\frac{3}{2} \frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2},$$

$$0 = \frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2} = \frac{d^3 Q}{d\varepsilon^3} = \frac{d^4 Q}{d\varepsilon^4},$$

où

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2,67894\dots, \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1,35412\dots,$$

ou avec les logarithmes vulgaires

$$\log \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 0,4279627\dots, \quad \log \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 0,1316565\dots$$

L'expression (49) prend alors la forme

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} e^{Fai} \left[(aI)^{\frac{2}{3}} A_1 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + (aI)^{\frac{1}{3}} i \left(B_1 - \frac{2}{3} A_1 K_1 \right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right]. \quad (50)$$

L'intégrale Q (47) a, sous une forme un peu différente, été calculée numériquement par M. Airy*, qui pour l'intégrale

$$\int_0^\infty d\omega \cos \frac{\pi}{2} (\omega^3 - \mu\omega) = W$$

a donné le tableau suivant:

μ	W	μ	W
-5	0,00041	0	0,66527
-4	0,00298	1	1,00041
-3	0,01730	2	0,56490
-2	0,07908	3	-0,56322
-1	0,27283	4	-0,47446
		5	0,68182

* On the intensity of Light in the neighbourhood of a Caustic. Trans. of the Cambr. phil. Soc., t. VI, p. 379; t. VIII, p. 595.

A l'aide de ce tableau, on peut aussi calculer Q , car on a

$$\varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \mu, \quad Q = 3 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} W.$$

En partant de $\mu = 0$, du côté négatif, W va toujours en décroissant jusqu'à 0; du côté positif, W va d'abord en croissant, atteint un maximum pour $\mu = 1,08$ et, par un mouvement périodique autour de zéro, se rapproche ensuite de cette dernière valeur. Le premier et le plus grand maximum de W est 1,504 fois plus grand que la valeur de W pour $m = 0$.

M. Stokes* a étendu le calcul de M. Airy jusqu'aux 50 premières racines de l'équation $W = 0$ et jusqu'aux 10 premières de $\frac{dW}{d\mu} = 0$. C'est ainsi qu'à $W = 0$ correspond la série

$$\mu = 2,4955; 4,3631; 5,8922; 7,2436; 8,4788 \dots$$

dans laquelle la racine d'ordre q , pour des valeurs croissantes de q , converge vers $3(q - \frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$. On a également pour $\frac{dW}{d\mu} = 0$ la série

$$\mu = 1,0845; 3,4669; 5,1446; 6,5782; 7,8685 \dots$$

où la racine d'ordre q converge vers $3(q - \frac{3}{4})^{\frac{2}{3}}$.

Les différents coefficients différentiels de Q par rapport à ε qui entrent dans l'expression (49) pourront tous être facilement exprimés par Q et $\frac{dQ}{d\varepsilon}$, car on a

$$\frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2} = -\frac{\varepsilon}{3} Q, *$$

* NOTE 19.

d'où peuvent se déduire les coefficients différentiels supérieurs, par exemple

$$\frac{d^4 Q}{d\varepsilon^4} = \frac{\varepsilon^2}{9} Q - \frac{2}{3} \frac{dQ}{d\varepsilon}, \text{ etc.}$$

* Trans. of the Cambr. phil. Soc., t. IX, p. 166.

Les maxima et minima de $\frac{dQ}{d\varepsilon}$ correspondent par conséquent à $Q = 0$, d'où il suit que le premier maximum a lieu pour $\mu = 2,4955 \dots$. Le module (ou l'amplitude) de l'expression (49) varie avec les valeurs croissantes de ε d'une manière analogue à l'intégrale W , si l'on peut se contenter de prendre en considération le premier terme, qui est de l'ordre le plus élevé; mais si les termes suivants ne sont pas négligeables, le module renfermera aussi bien Q que $\frac{dQ}{d\varepsilon}$, d'où il résulte que les maxima seront déplacés et que le module ne pourra, en général, devenir nul dans ses variations périodiques. La périodicité deviendra ainsi moins apparente.

En comparant entre elles les deux expressions (43) et (49) de l'intégrale (42), on voit que la première est du même ordre que $a^{\frac{1}{2}}$ et la seconde du même ordre que $a^{\frac{3}{2}}$. On peut se rendre compte de la manière dont se fait le passage de l'une à l'autre en se représentant que H décroît jusqu'à devenir une grandeur très petite, en même temps que $G - 2p\pi$ continue à être nul. Il sera alors loisible de poser, dans l'intégrale (42), $z = z' + \delta$ et de déterminer δ de façon que le coefficient de z'^2 dans l'exposant devienne nul. Nous arrivons ainsi à la forme (45) où $G - 2p\pi$ devient égal à $-\frac{H^2}{3I}$, et par conséquent

$$3\varepsilon = H^2 \sqrt[3]{\frac{a^2}{I}}.$$

On voit par là que, dans ce passage de l'intégrale (42) à l'intégrale (45), ε restera nécessairement *positif*. Le passage de (43) à (49) se fait donc par cette variation périodique décrite plus haut, les valeurs de μ ou de ε variant en décroissant positivement, variation dans laquelle le dernier et le plus grand maximum est atteint avant

que ε devienne nul, tandis qu'à partir de là le module décroît rapidement jusqu'à 0, en même temps que ε , en passant par 0, prend des valeurs négatives de plus en plus grandes.

Nous rencontrerons enfin dans le chapitre suivant des sommes qui se laissent transformer en une intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} dz \left(A \frac{z}{a} + B \frac{z^2}{a^2} + \dots \right) e^{(ra + a \frac{z^2}{a} + H \frac{z^4}{a^2} + I \frac{z^6}{a^3} + \dots)i}. \quad (51)$$

Si l'on y pose $Gz^2 = ax$ et que G ne soit ni nul ni très petit, la limite supérieure de x rentrera dans les grandeurs que nous avons désignées plus haut par ω^* , et en * NOTE 20. négligeant les termes d'un ordre inférieur à l'unité, le résultat de l'intégration sera

$$\frac{A}{2G} e^{(ra + \frac{\pi}{2})i}. \quad (52)$$

Mais si G est très petit, on pose $Hx^2 = a^2x^2$, la limite supérieure de x étant désignée comme auparavant par ω^* , et on pose pour abrégé

* NOTE 21.

$$G = \pm \varepsilon \sqrt{\frac{H}{a}}, \quad (53)$$

le signe supérieur correspondant à G positif et le signe inférieur à G négatif. L'intégrale devient par suite

$$\frac{1}{2H} \int_0^{\omega} dx \left((aH)^{\frac{1}{2}} A + Bx + \frac{AI}{H} x^2 \right) e^{(ra \pm \varepsilon x + x^2)i}. \quad (54)$$

Pour $\varepsilon = 0$, l'intégration donne

$$\frac{A}{4} \sqrt{\frac{a\pi}{H}} e^{(ra + \frac{\pi}{4})i} + \frac{1}{4H^2} (BH - AI) e^{(ra + \frac{\pi}{2})i}, \quad (55)$$

tandis que l'intégrale générale (54) peut s'exprimer par

$$\frac{e^{Fai}}{2H} \left((aH)^{\frac{1}{2}} A Q \mp iB \frac{dQ}{d\varepsilon} \mp \frac{AI}{H} \frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2} \right), \quad (56)$$

en posant
$$Q = \int_0^{\omega} dx e^{\pm(\varepsilon x + x^2)i}. \quad (57)$$

De cette dernière intégrale on tire par différentiation relativement à ε et par intégration par parties

$$\frac{dQ}{d\varepsilon} = \mp \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon i}{2} Q, \quad (58)$$

d'où résulte encore

$$\frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2} = \pm \left(\frac{i}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} \right) + \left(-\frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^3 i}{8} \right) Q. \quad (59)$$

En substituant ces valeurs dans (56), cette expression de l'intégrale cherchée sera déterminée par des grandeurs connues et par l'intégrale Q .

Cette dernière intégrale a souvent été employée sous différentes formes, notamment pour le calcul des phénomènes de diffraction, par exemple par Fresnel, Cauchy, Knochenhauer, Quet, etc. M. Ph. Gilbert* a calculé une table étendue pour les deux fonctions N et M , déterminées par

$$V \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\omega} dx e^{(\varepsilon x + x^2)i} = N + Mi, \quad \varepsilon = V\sqrt{2\pi}\mu,$$

et comprenant toutes les valeurs depuis $\mu^2 = 0,00$ jusqu'à $\mu^2 = 30,00$.

Par conséquent, lorsqu'on prend le signe supérieur dans l'intégrale Q , elle peut être calculée directement par cette table. Si l'on prend le signe inférieur et qu'on pose

* Recherches anal. sur la diffraction de la lumière. Mém. cour. de l'Acad. de Bruxelles, t XXXI, p. 1. 1862-63.

$$V \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\omega} dx e^{(-\varepsilon x + x^2)i} = N_1 + M_1 i,$$

on aura

$$N + N_1 + (M + M_1)i = V \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\omega}^{\omega} dx e^{(\varepsilon x + x^2)i} = V\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi - \varepsilon^2}{4} + i \sin \frac{\pi - \varepsilon^2}{4} \right),$$

expression qui permet de déterminer N_1 et M_1 par

$$N_1 = V\sqrt{2} \cos \frac{\pi - \varepsilon^2}{4} - N, \quad M_1 = V\sqrt{2} \sin \frac{\pi - \varepsilon^2}{4} - M.$$

Les deux grandeurs N et M décroissent rapidement et d'une manière continue pour des valeurs croissantes de ε , d'où il suit que N_1 et M_1 sont des fonctions périodiques. Comme, d'après (58), on a signe avec le inférieur

$$\frac{dN_1}{d\varepsilon} = \frac{1}{V\sqrt{2}\pi} + \frac{\varepsilon}{2} M_1, \quad \frac{dM_1}{d\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{2} N_1,$$

il en résulte que

$$N_1 \frac{dN_1}{d\varepsilon} + M_1 \frac{dM_1}{d\varepsilon} = \frac{N_1}{V\sqrt{2}\pi}.$$

On voit par là que le maximum et le minimum de $N_1^2 + M_1^2$ correspondent à $N_1 = 0$, qui lui-même, pour de grandes valeurs de ε , correspondra approximativement à $\cos \frac{\pi - \varepsilon^2}{4} = 0$, et par conséquent à $\varepsilon^2 = (4p-1)\pi$ ou à $\mu = V \frac{\sqrt{4p-1}}{2}$, p étant un nombre entier.

D'après M. Gilbert, on a

$$\begin{aligned} N_1^2 + M_1^2 = 2,7407, \quad \mu = 1,2172, \quad \left(V \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,2247 \right), \quad 1^{\text{er}} \text{ max.}, \\ 1,5562, \quad \mu = 1,8725, \quad \left(V \frac{\sqrt{7}}{2} = 1,8708 \right), \quad 1^{\text{er}} \text{ min.}, \\ 2,3985, \quad \mu = 2,3445, \quad \left(V \frac{\sqrt{11}}{2} = 2,3452 \right), \quad 2^{\text{e}} \text{ max.}, \\ 1,6864, \quad \mu = 2,7390, \quad \left(V \frac{\sqrt{15}}{2} = 2,7386 \right), \quad 2^{\text{e}} \text{ min.} \end{aligned}$$

A $\mu = 0$ correspond $N_1^2 + M_1^2 = \frac{1}{2}$, et à $\mu = \infty$, $N_1^2 + M_1^2 = 2$.

Si, dans (56), nous ne tenons compte que du terme de l'ordre le plus élevé (a^2), il résulte de ce qui précède que le module de cette expression croîtra de 0, pour $G = +\infty$, jusqu'à $\frac{A}{4} \sqrt{\frac{a\pi}{H}}$, pour $G = 0$, qu'il continuera à croître pour des valeurs décroissantes de G

* NOTE 22. jusqu'à $2,3412 \frac{A}{4} \sqrt{\frac{a\pi}{H}}$, pour $G = -1,2172 \sqrt{\frac{2\pi H}{a}}$ *, et que, par des variations périodiques décroissantes, il atteindra enfin le double de la valeur correspondant à $G = 0$.

4. Cas de a très grand. Mouvement sur l'axe principal.

De même que dans le chapitre précédent, a est considéré ici comme un nombre très grand, et nous chercherons à déterminer le mouvement de la lumière en négligeant seulement les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité.

Nous essaierons d'abord de déterminer ce mouvement dans le voisinage du centre de la sphère, en regardant a' qui est la distance du point considéré au centre, mesurée avec $\frac{\lambda'}{2\pi}$ comme unité de longueur, comme un nombre très petit par rapport à a et à a' . Sous cette condition, $v_n(a')$, déterminé par la série (22), deviendra très petit si n se rapproche de a , et c'est pourquoi les termes de la série (31), en ce qui concerne K' et S' , n'acquièrent de l'importance que pour les valeurs inférieures de n . Dans les expressions que les équations (34) donnent pour k'_n et s'_n , on pourra donc aussi, d'après (23) et (25), poser

$$v_n(a) = \sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right), \quad v_n(a') = \sin\left(a' - \frac{n\pi}{2}\right), \\ w_n(a) = \cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right).$$

On obtient ainsi

$$\left. \begin{aligned} s'_{2n+1} = k'_{2n} = k'_0 &= e^{ai} \frac{N}{\cos a' + iN \sin a'}, \\ s'_{2n} = k'_{2n+1} = s'_0 &= e^{ai} \frac{N}{N \cos a' + i \sin a'}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Les séries (31) deviennent alors

$$K' = -i \frac{\cos \phi}{2a'} \frac{d}{d\varphi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} [(P_n(\cos \varphi) + P_n(-\cos \varphi)) k'_0 \\ + (P_n(\cos \varphi) - P_n(-\cos \varphi)) s'_0] v_n(a'), \\ S' = -\frac{\sin \phi}{2a'} \frac{d}{d\varphi} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} e^{(kt - \frac{n\pi}{2})i} [(P_n(\cos \varphi) + P_n(-\cos \varphi)) s'_0 \\ + (P_n(\cos \varphi) - P_n(-\cos \varphi)) k'_0] v_n(a').$$

On peut sommer ces séries à l'aide des équations (26)* *NOTE 23. et (27), ce qui donne

$$K' = -i \frac{\cos \phi}{a' \sin \varphi} e^{kti} [(-\sin a' \cos \varphi + \sin(a' \cos \varphi)) k'_0 + i(-\cos a' + \cos(a' \cos \varphi)) s'_0], \\ S' = -\frac{\sin \phi}{a' \sin \varphi} e^{kti} [(-\sin a' \cos \varphi + \sin(a' \cos \varphi)) s'_0 + i(-\cos a' + \cos(a' \cos \varphi)) k'_0].$$

En substituant ces valeurs dans les équations (18) et en posant pour abrégé

$$e^{kti} (-i \sin(a' \cos \varphi) k'_0 + \cos(a' \cos \varphi) s'_0) = Q,$$

il vient

$$\bar{\xi}' = \sin \varphi \cos \phi Q, \quad \bar{\eta}' = \cos \varphi \cos \phi Q, \quad \bar{\zeta}' = -\sin \phi Q.$$

On en déduit les composantes par rapport aux axes fixes

$$\xi' = 0, \quad \eta' = Q, \quad \zeta' = 0.$$

En remplaçant Q par sa valeur, on obtient par une petite transformation

$$\eta' = e^{i(kt - a' \cos \varphi)} \frac{k'_0 + s'_0}{2} - e^{i(kt + a' \cos \varphi)} \frac{k'_0 - s'_0}{2}. \quad (61)$$

Le sens physique de ce résultat ressort plus distinct si on développe en série les valeurs (60) de k'_0 et de s'_0 , après avoir exprimé $\cos a'$ et $\sin a'$ sous une forme exponentielle, ce qui donne

$$k'_0 = \frac{2N}{N+1} \sum_0^{\infty} \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^m e^{(\alpha-(2m+1)a')i}, \quad s'_0 = \frac{2N}{N+1} \sum_0^{\infty} \left(\frac{1-N}{1+N}\right)^m e^{(\alpha-(2m+1)a')i},$$

où m passe par la série des nombres entiers depuis 0 jusqu'à ∞ . On obtient ainsi

$$\gamma' = \frac{2N}{N+1} \sum_0^{\infty} \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2m} e^{(kt - a' \cos \varphi + \alpha - (4m+1)a')i} - \frac{2N}{N+1} \sum_0^{\infty} \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2m+1} e^{(kt + a' \cos \varphi + \alpha - (4m+3)a')i}. \quad (62)$$

Le mouvement de la lumière dans le voisinage du centre est ainsi représenté par une somme de vibrations qui sont parallèles à celles des rayons incidents, et appartiennent à deux groupes de rayons dont l'un, ayant la même direction que les rayons incidents, est réfléchi un nombre pair de fois ou pas du tout par la surface interne de la sphère, pendant que l'autre se dirige en sens contraire après un nombre impair de réflexions. A l'entrée des rayons dans la sphère, l'amplitude est changée dans le rapport de $1+N$ à $2N$ et, après chaque réflexion, dans celui de $1+N$ à $1-N$, tandis que la phase correspond au chemin optique parcouru, résultats qui s'accordent avec ceux auxquels on arrive par la méthode élémentaire, lorsque les deux surfaces réfringentes sont considérées comme planes et perpendiculaires aux rayons incidents.

Si le point considéré n'est pas très près du centre, il faut avoir égard, dans les séries, aux termes qui

correspondent à de très grandes valeurs de n . C'est pourquoi il sera d'abord nécessaire de chercher des développements convenables pour les fonctions v_n et w_n .

On a identiquement

$$v_n = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_n}{w_n}, \quad w_n = \sqrt{v_n^2 + w_n^2} \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_n}{w_n},$$

ou en posant

$$v_n^2 + w_n^2 = q_n, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_n}{w_n} = \lambda_n,$$

$$v_n = \sqrt{q_n} \sin \lambda_n, \quad w_n = \sqrt{q_n} \cos \lambda_n. \quad (63)$$

A l'aide de l'équation

$$w_n v'_n - w'_n v_n = 1,$$

on obtient en outre, en désignant la variable par a ,

$$\frac{d\lambda_n}{da} = \frac{1}{q_n}, \quad (64)$$

d'où l'on tire par intégration, $\lambda_n = a - \frac{n\pi}{2}$ correspondant à $a = \infty$,

$$\lambda_n = a - \frac{n\pi}{2} - \int_a^{\infty} da \left(\frac{1}{q_n} - 1 \right). \quad (65)$$

Les séries fournies par (23) et (25) pour v_n et w_n donnent

$$q_n = 1 + \frac{n(n+1)}{a^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{a^4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots \quad (66)^* \text{ NOTE 24.}$$

Si a est un nombre très grand de l'ordre de a , et que toutes les grandeurs de l'ordre de a^{-1} ou d'un ordre inférieur puissent être négligées par rapport à celles du même ordre que l'unité, on pourra, par la sommation de la série (66), obtenir l'expression suivante de q_n pour toutes les valeurs de n jusqu'à une certaine limite inférieure à a , et où la

différence $a - (n + \frac{1}{2})$ peut encore être rapportée à l'ordre de α ,

* NOTE 25.
$$q_n = \frac{a}{\sqrt{a^2 - (n + \frac{1}{2})^2}}, \quad a > n + \frac{1}{2}. \quad (67)$$

En substituant cette expression de q_n dans (65), où elle doit rester valable pour tous les éléments de l'intégrale, on trouve par l'intégration

$$\lambda_n = \sqrt{a^2 - (n + \frac{1}{2})^2} - \frac{n\pi}{2} + (n + \frac{1}{2}) \arcsin \frac{n + \frac{1}{2}}{a}. \quad (68)$$

A q_n et à λ_n sera ajoutée plus loin la variable, qui, pour abrégier, a été omise ici.

Tant que l'équation (67) est applicable, les coefficients différentiels de $q_n(a)$ et de $q_n(a')$ par rapport à a et à a' peuvent être négligés par rapport aux grandeurs de

* NOTE 26. l'ordre de a^0 , comme $q_n(a)$ et $q_n(a')$. Si nous revenons maintenant aux équations différentielles (33) et (34) et si nous introduisons pour abrégier les notations

$$\begin{aligned} \frac{Nq_n(a') - q_n(a)}{Nq_n(a') + q_n(a)} &= b_n, & \frac{2Nq_n(a)q_n(a')(Nq_n(a') - q_n(a))^m}{(Nq_n(a') + q_n(a))^{m+2}} &= b_{n,m}, \\ \frac{q_n(a') - Nq_n(a)}{q_n(a') + Nq_n(a)} &= c_n, & \frac{2Nq_n(a)q_n(a')(q_n(a') - Nq_n(a))^m}{(q_n(a') + Nq_n(a))^{m+2}} &= c_{n,m}, \\ \frac{2N\sqrt{q_n(a)q_n(a')}(Nq_n(a') - q_n(a))^m}{(Nq_n(a') + q_n(a))^{m+1}} &= \beta_{n,m}, \\ \frac{2N\sqrt{q_n(a)q_n(a')}(q_n(a') - Nq_n(a))^m}{(q_n(a') + Nq_n(a))^{m+1}} &= \gamma_{n,m}, \end{aligned}$$

on pourra exprimer les coefficients par des fractions qui se laissent développer dans les séries convergentes

* NOTE 27. suivantes*:

$$\left. \begin{aligned} 2k_n &= -1 - b_n e^{2\lambda_n(a)i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} 2b_{n,m} e^{2(\lambda_n(a) - (m+1)\lambda_n(a'))i}, \\ 2s_n &= -1 - c_n e^{2\lambda_n(a)i} + \sum_{m=0}^{m=\infty} 2c_{n,m} e^{2(\lambda_n(a) - (m+1)\lambda_n(a'))i}, \\ k'_n &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \beta_{n,m} e^{(\lambda_n(a) - (2m+1)\lambda_n(a'))i}, \\ s'_n &= \sum_{m=0}^{m=\infty} \gamma_{n,m} e^{(\lambda_n(a) - (2m+1)\lambda_n(a'))i}. \end{aligned} \right\} (69)$$

Passant ensuite à la sommation des séries (31), nous nous bornerons, dans ce chapitre, au cas où le point considéré est situé sur l'axe des x (l'axe principal). Il est à remarquer que, pour $\cos \varphi = 1$, on a

$$\frac{dP_n(\cos \varphi)}{\sin \varphi d\varphi} = \frac{d^2 P_n(\cos \varphi)}{d\varphi^2} = -\frac{n(n+1)}{2},$$

et pour $\cos \varphi = -1$

$$\frac{dP_n(\cos \varphi)}{\sin \varphi d\varphi} = -\frac{d^2 P_n(\cos \varphi)}{d\varphi^2} = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si maintenant on introduit dans (17) les développements de K et de S et dans (18) ceux de K' et de S' , et qu'on détermine ensuite les composantes par rapport aux axes fixes à l'aide des équations

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \varphi \bar{\xi} - \sin \varphi \bar{\eta}, \\ \eta &= \sin \varphi \cos \phi \bar{\xi} + \cos \varphi \cos \phi \bar{\eta} - \sin \phi \bar{\zeta}, \\ \zeta &= \sin \varphi \sin \phi \bar{\xi} + \cos \varphi \sin \phi \bar{\eta} + \cos \phi \bar{\zeta}, \end{aligned}$$

et des équations correspondantes pour un point intérieur, on trouvera que les vibrations, sur l'axe principal, vont partout dans la direction de l'axe des y , ce qui est aussi une conséquence directe de la symétrie du mouvement de la lumière par rapport au plan des xy , et que

les vibrations à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère seront déterminées par

$$\left. \begin{aligned} \eta &= e^{(kt \mp a)i} + \sum_1^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{a} e^{(kt \mp \frac{n\pi}{2})i} (\pm i k_n (v'_n(a) + w'_n(a)i) + s_n (v_n(a) + w_n(a)i)), \\ \eta' &= \sum_1^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{a} e^{(kt \mp \frac{n\pi}{2})i} (\pm i k'_n v'_n(a) + s'_n v_n(a)), \end{aligned} \right\} (70)$$

le signe supérieur se rapportant au côté positif de l'axe des x , et le signe inférieur au côté négatif.

Les fonctions de n qui entrent dans ces expressions peuvent être développées suivant les puissances de $n + \frac{1}{2}$ en séries qui restent convergentes jusqu'à une certaine limite $n = n_1$, jusqu'à laquelle nous effectuerons d'abord les sommations indiquées. C'est ainsi que l'expression de $\lambda_n(a)$ dans (68) peut être développée dans la série suivante

$$\lambda_n(a) = a - \frac{n\pi}{2} + \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{a} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(n + \frac{1}{2})^4}{3a^3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{(n + \frac{1}{2})^6}{5a^5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots (71)$$

Pour g_n nous avons le développement en série (66) et, à l'aide des équations (63), on obtient

$$v_n(a) + w_n(a)i = i\sqrt{g_n(a)} e^{-\lambda_n(a)i},$$

et en négligeant $g'_n(a)$, en vertu de (64),

$$v'_n(a) + w'_n(a)i = \frac{1}{\sqrt{g_n(a)}} e^{-\lambda_n(a)i}.$$

Nous considérerons maintenant à part les différents termes dont se composent les équations (69) qui définissent les coefficients, et nous commencerons par poser

$$2k_n = -1, \quad 2s_n = -1.$$

La première équation (70) donnera alors

$$\eta = e^{(kt \mp a)i} - i \sum_1^{n_1} \frac{n + \frac{1}{2}}{2a} \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{g_n(a)}} + \sqrt{g_n(a)} \right) e^{(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a))i}.$$

En y remplaçant $\lambda_n(a)$ par la série (71), on voit que l'exposant renfermera le terme $\frac{n\pi}{2} (\mp 1 + 1)$. Si l'on prend le signe inférieur, ce terme se réduit à $n\pi$ et, d'après ce qui a été exposé dans le chapitre précédent, la somme devient nulle. Par conséquent, on aura pour le côté négatif de l'axe des x

$$\eta = e^{(kt+a)i}.$$

Mais si l'on prend le signe supérieur, la somme, en posant $n + \frac{1}{2} = z$, peut être changée en une intégrale de la forme (51), et on obtient par comparaison

$$A = \frac{a}{a}, \quad Fa = kt - a, \quad G = -\frac{a}{2a},$$

tandis que, d'après (52), l'intégrale devient égale à

$$-e^{(kt-a+\frac{\pi}{2})i}.$$

On a donc pour le côté positif de l'axe des x

$$\eta = e^{(kt-a)i} + i e^{(kt-a+\frac{\pi}{2})i} = 0.$$

La partie du mouvement qui est représentée ici n'est donc pas autre chose que le mouvement du rayon central incident jusqu'au point où il rencontre la sphère.

Si l'on considère ensuite le deuxième terme des deux premières équations (69) et qu'on pose

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(a)i},$$

la somme qui figure dans la première équation (70) renfermera l'exposant

$$\left(kt - a + 2a + \frac{n\pi}{2} (\mp 1 - 1) + \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \right) + \dots \right) i.$$

Avec le signe supérieur, la somme doit ici devenir nulle, tandis qu'avec le signe inférieur, elle pourra comme auparavant être changée en une intégrale de la forme (51), et on obtiendra par comparaison

$$A = \frac{N-1}{N+1} \frac{a}{a} i, \quad Fa = kt - a + 2a, \quad G = \frac{a}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \right).$$

D'après (52), l'intégrale sera donc égale à

$$-\frac{N-1}{N+1} \cdot \frac{1}{a \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \right)} e^{(kt - a + 2a)i}. \quad (72)$$

Cette partie du mouvement correspond au rayon central réfléchi par la surface antérieure de la sphère, et le résultat est le même que celui qui peut être obtenu par la voie élémentaire, la phase étant déterminée par le chemin optique parcouru, et l'amplitude, après la réflexion, étant égale à $-\frac{N-1}{N+1}$ sur la surface même de la sphère, par conséquent à la distance $\frac{1}{2}a$ (les distances mesurées avec $\frac{\lambda}{2\pi}$ comme unité de longueur) du foyer virtuel des rayons centraux, et devant ensuite décroître dans le même rapport que le point considéré s'éloigne de ce foyer.

Considère-t-on enfin dans les équations (69) le terme qui correspond à

$$k_n = b_{n,m} e^{2(\lambda_n(a) - (m+1)\lambda_n(a'))i}, \quad s_n = c_{n,m} e^{2(\lambda_n(a) - (m+1)\lambda_n(a'))i},$$

le mouvement sera déterminé par

$$\sum_1^{n_1} i \frac{n + \frac{1}{2}}{a \sqrt{q_n(a)}} (\pm b_{n,m} + c_{n,m} q_n(a)) e^{\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a) - (2m+2)\lambda_n(a) \right) i}.$$

Développé suivant les puissances de $n + \frac{1}{2}$, cet exposant deviendra

$$\left(kt - a + 2a - (2m+2)a' + \frac{n\pi}{2} (\mp 1 + 2m+1) + \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{a} - \frac{2m+2}{a'} \right) + \dots \right) i.$$

La somme sera nulle à moins qu'on n'ait

$$\mp 1 + 2m + 1 = 4p,$$

c'est-à-dire à moins que m ne soit un nombre pair quand le point est situé sur le côté positif de l'axe des x , et un nombre impair quand il est situé sur le côté négatif. Cela posé, la somme peut être changée en une intégrale de la forme (51) et on obtient par comparaison

$$* A = i \frac{\alpha}{a} \frac{4N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}, \quad B = 0, \quad * \text{ NOTE 28.}$$

$$Fa = kt - a + 2a - (2m+2)a', \quad G = \frac{a}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{a} - \frac{2m+2}{a'} \right),$$

$$H = \frac{a^3}{24} \left(-\frac{1}{a^3} + \frac{2}{a^3} - \frac{2m+2}{a'^3} \right), \quad I = \frac{a^5}{80} \left(-\frac{1}{a^5} + \frac{2}{a^5} - \frac{2m+2}{a'^5} \right).$$

D'après (52), qui suppose que G n'est pas très petit, le résultat de l'intégration sera

$$-\frac{4N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}} \cdot \frac{1}{a \left(-\frac{1}{a} + \frac{2}{a} - \frac{2m+2}{a'} \right)} e^{(kt - a + 2a - (2m+2)a')i}.$$

Ce résultat peut également être obtenu par la voie élémentaire. Qu'on imagine un faisceau cylindrique de rayons centraux, de diamètre 1, pénétrant dans la sphère. Après m réflexions intérieures, ce faisceau sortira de la sphère avec le diamètre $\frac{(2m+2)a-a'}{a}$, et se réunira ensuite en un foyer réel ou virtuel. Si ce foyer est à une distance a_1 du centre, le diamètre du faisceau à la distance a sera $\frac{a_1-a}{a_1-a} \cdot \frac{(2m+2)a-a'}{a}$. Or la distance focale a_1 est déterminée par $-\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a} - \frac{2m+2}{a'} = 0$, et l'amplitude des vibrations, qui, après les m réflexions et deux réfractions, est devenue $\left(\frac{1-N}{1+N}\right)^m \frac{4N}{(1+N)^2}$, sera augmentée dans le même rapport que le diamètre du faisceau a diminué. Si de plus la phase est déterminée par le chemin optique parcouru, on voit que le résultat est exactement le même que celui qui a été trouvé plus haut.

Par contre, on ne peut procéder ainsi pour déterminer le mouvement aux foyers eux-mêmes. Ceux-ci sont déterminés par l'équation $G = 0$, à laquelle se rattache la condition $2N > 2m+2 \geq N$, correspondant à $0 < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a'}$, par où l'on voit qu'à $N \leq 1$ ne correspond aucun foyer réel, à $1 < N < 2$ un seul foyer, etc. A $G = 0$ correspond l'équation (55), qui, avec les valeurs trouvées plus haut de A , B , H et I , donne l'expression suivante pour le mouvement au foyer considéré

$$-\frac{2N(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}} \left(\sqrt{\frac{6\pi}{a^2 \left(-\frac{1}{a^3} + \frac{2}{a^2} - \frac{2m+2}{a'^3} \right)}} e^{(Fa - \frac{\pi}{4})i} - \frac{18}{5} \frac{-\frac{1}{a^3} + \frac{2}{a^2} - \frac{2m+2}{a'^3}}{a \left(-\frac{1}{a^3} + \frac{2}{a^2} - \frac{2m+2}{a'^3} \right)^2} e^{Fai} \right). \quad (74)$$

Il résulte de l'expression de G que, si, d'un point extérieur, nous nous rapprochons de la sphère le long de l'axe principal et passons par un foyer, la valeur de G de positive deviendra négative en passant par 0. On voit par là que l'amplitude, conformément à ce qui a été exposé à la fin du chapitre précédent, croît rapidement pendant ce rapprochement, depuis une valeur très petite dans le voisinage du foyer jusqu'à la valeur de l'ordre de a^2 déterminée plus haut pour le foyer, et que, continuant encore à croître, elle atteint par des variations périodiques une valeur double de celle qu'elle avait au foyer. Au delà de ce point, l'axe est rencontré par d'autres rayons situés en dehors des rayons centraux et dont l'action sera déterminée plus loin. Une détermination plus précise du mouvement de la lumière dans le voisinage du foyer résulte de (56) et de l'aperçu donné ensuite de la valeur de l'intégrale Q (57).

Comme exemple, je supposerai $m = 0$, le rayon de la sphère = 1^c , l'indice de réfraction = $1,5$, et la longueur d'onde de la lumière incidente = $0^{mm},0005$. On aura alors

$$a = 40000\pi, \quad a' = 1,5a, \quad a = 1,5a, \quad N = 1,5.$$

Ces valeurs substituées dans (74) donnent pour résultat

$$-467,23 e^{(Fa - \frac{\pi}{4})i} + 1,50 e^{Fai}.$$

On voit ainsi que le deuxième terme n'a qu'une importance médiocre, et que l'intensité, qui est proportionnelle au carré de l'amplitude, est très considérable à ce foyer, à savoir 217311 fois plus grande que l'intensité de la lumière incidente. Pour une sphère

ayant le même indice de réfraction et un rayon double, l'intensité serait, à très peu près, deux fois plus grande.

A une petite distance δ (mesurée avec $\frac{\lambda}{2\pi}$ comme unité de longueur) du foyer, on aura $G = -\frac{a\delta}{2a^2}$, et si l'intensité a atteint en ce point son premier maximum, on tirera de la valeur de G donnée à la fin du chapitre précédent $\delta = 1047$, correspondant à $0^{\text{mm}},0833$. En ce point, l'intensité s'élèvera à 1191200, car elle est ici 5,4814 fois plus grande qu'au foyer.

Le calcul de la partie du mouvement de la lumière qui a lieu sur l'axe en dedans de la sphère, et qui procède des rayons centraux, peut se faire d'une manière analogue en partant de la seconde équation (70). La somme à calculer, en prenant isolément le terme général des sommes données dans (69) pour k'_n et s'_n , sera

$$\sum_1^{n_1} \frac{n + \frac{1}{2}}{a' \sqrt{q_n(a')}} (\pm i \cos \lambda_n(a') \beta_{n,m} + q_n(a') \sin \lambda_n(a') \gamma_{n,m}) e^{(kt + \frac{n\pi}{2} + \lambda_n(a') - (2m+1)\lambda_n(a'))i}$$

Si, dans cette expression, on donne à $\cos \lambda_n(a')$ et à $\sin \lambda_n(a')$ la forme exponentielle, et qu'on développe ensuite toutes les fonctions λ_n suivant la formule (71), les coefficients de $\frac{n\pi}{2}i$ dans les exposants de e deviendront

$$\mp 1 + 2m + 1 \quad \text{et} \quad \mp 1 + 2m - 1.$$

C'est seulement lorsque ces coefficients sont nuls ou égaux à un multiple de 4 que la somme n'est pas nulle, et cela n'aura lieu que s'ils peuvent être rapportés à

* NOTE 29. la forme*

$$\mp (1 - (-1)^m) + 2m.$$

Dans ce cas, on pourra donner à la somme la forme

de l'intégrale (51) et, par comparaison avec celle-ci, obtenir

$$A = \pm i \frac{a}{a'} \frac{2N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}}, \quad B = 0,$$

$$Fa = kt \mp (-1)^m a' + a - (2m+1)a', \quad G = \frac{a}{2} \left(\mp \frac{(-1)^m}{a'} + \frac{1}{a} - \frac{2m+1}{a'} \right),$$

$$H = \frac{a^2}{24} \left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3} \right), \quad I = \frac{a^5}{80} \left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^5} + \frac{1}{a^5} - \frac{2m+1}{a'^5} \right).$$

Si G n'est pas très petit, le résultat de l'intégration sera d'après (52)

$$\mp \frac{2N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}} \frac{1}{a' \left(\mp \frac{(-1)^m}{a'} + \frac{1}{a} - \frac{2m+1}{a'} \right)} e^{(kt \mp (-1)^m a' + a - (2m+1)a')i}.$$

Mais si $G = 0$, on aura d'après (55)

$$\mp \frac{N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}} \left(\sqrt{\frac{6\pi}{a'^2 \left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3} \right)}} e^{(Fa - \frac{\pi}{4})i} - \frac{18}{5} \frac{\mp \frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3}}{a' \left(\mp \frac{(-1)^m}{a'^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{2m+1}{a'^3} \right)^2} e^{Fa i} \right). \quad (76)$$

Comme on doit avoir $a' \ll a$, on voit que l'équation $G = 0$ n'est pas possible pour $N-1 < 2m+1 < N+1$, tandis que l'équation pourra être satisfaite par toutes les autres valeurs de m , en prenant l'un ou l'autre des deux signes qui entrent dans l'expression ci-dessus de G .

Si, dans (75), on regarde a' comme infiniment petit et qu'on remplace m par $2m$ et $2m+1$, le résultat correspondra à celui qui a été trouvé dans (62), où le mouvement dans le voisinage du centre a été déterminé par une autre voie.

Nous continuerons maintenant la sommation des séries (70) de $n = n_1$ à $n = n_2$, n_2 étant la limite supérieure de n qui satisfait à la condition de l'application des formules (67) et (68) aux fonctions q_n et λ_n . Les séries prendront ainsi la forme indiquée dans (35), et en posant également ici $n = \nu + z$, où ν et z sont considérés comme des nombres entiers, nous introduirons les notations suivantes

$$* \text{ NOTE 30. } \nu + \frac{1}{2} = a \sin \theta = a' \sin \theta' = a \sin \theta = a' \sin \theta', * \quad (77)$$

où les quatre angles θ , θ' , ϑ et ϑ' sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et supposés n'être pas très voisins de ces deux limites.

Il résulte de (67) que

$$1 = \cos \theta q_\nu(a) = \cos \theta' q_\nu(a') = \cos \vartheta q_\nu(a) = \cos \vartheta' q_\nu(a'). \quad (78)$$

Les coefficients b_ν , $b_{\nu,m}$, etc., seront alors déterminés par

$$b_\nu = \frac{N \cos \theta - \cos \theta'}{N \cos \theta + \cos \theta'}, \quad b_{\nu,m} = 2N \cos \theta \cos \theta' \frac{(N \cos \theta - \cos \theta')^m}{(N \cos \theta + \cos \theta')^{m+2}},$$

$$c_\nu = \frac{\cos \theta - N \cos \theta'}{\cos \theta + N \cos \theta'}, \quad c_{\nu,m} = 2N \cos \theta \cos \theta' \frac{(\cos \theta - N \cos \theta')^m}{(\cos \theta + N \cos \theta')^{m+2}},$$

$$\beta_{\nu,m} = 2N \sqrt{\cos \theta \cos \theta'} \frac{(N \cos \theta - \cos \theta')^m}{(N \cos \theta + \cos \theta')^{m+1}},$$

$$\gamma_{\nu,m} = 2N \sqrt{\cos \theta \cos \theta'} \frac{(\cos \theta - N \cos \theta')^m}{(\cos \theta + N \cos \theta')^{m+1}}.$$

Les coefficients correspondants b_n , $b_{n,m}$, etc., pourront être développés en séries suivant les puissances de z , telles, par exemple, que

$$b_n = b_\nu + \left(\frac{1}{a \cos \theta} \frac{db_\nu}{d\theta} + \frac{1}{a' \cos \theta'} \frac{db_\nu}{d\theta'} \right) z + \dots$$

On a également d'après (68)

$$\lambda_\nu(a) = a \cos \theta - \frac{\nu\pi}{2} + (\nu + \frac{1}{2}) \theta,$$

$$\lambda_n(a) = \lambda_\nu(a) + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) z + \frac{z^2}{2a \cos \theta} + \frac{\sin \theta z^3}{6a^3 \cos^3 \theta} + \frac{(1 + 2 \sin^2 \theta) z^4}{24a^5 \cos^5 \theta} + \dots$$

et l'on obtient de la même manière les développements correspondants de $\lambda_n(a')$, $\lambda_n(a)$, $\lambda_n(a')$.

De même qu'auparavant, nous considérerons maintenant à part les différents termes des développements (69) de k_n et de s_n , et nous commencerons par supposer que

$$2k_n = -1, \quad 2s_n = -1.$$

La somme γ (70), prise de $n = n_1$ à $n = n_2$, renfermera dans cette hypothèse l'exposant

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) \right) i = \left(kt \mp \frac{\nu\pi}{2} - \lambda_\nu(a) + \left(\mp \frac{\pi}{2} - \vartheta + \frac{\pi}{2} \right) z + \dots \right) i.$$

Le coefficient de z ne pouvant être ici ni nul ni très petit, la somme, dans ce cas, sera donc nulle.

Si l'on suppose ensuite que

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(a)i},$$

la somme renfermera l'exposant

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a) \right) i,$$

où le coefficient de zi deviendra $\mp \frac{\pi}{2} - \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) + 2 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$, et ne pourra non plus être nul ni très petit, $2\theta - \vartheta$ devant être plus petit que π et en même temps plus grand que 0, parce qu'on doit avoir $\theta \geq \vartheta$. La somme sera donc aussi nulle dans ce cas.

Si l'on pose enfin

$$k_n = b_{n,m} e^{2(\lambda_n(a) - (m+1)\lambda_n(a'))i}, \quad s_n = c_{n,m} e^{2(\lambda_n(a) - (m+1)\lambda_n(a'))i},$$

la somme renfermera l'exposant

$$\left(kt \mp \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a) - (2m+2)\lambda_n(a') \right) i$$

où le coefficient de zi deviendra

$$\frac{\pi}{2} (2m+1 \mp 1) - \vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' = G.$$

Si maintenant on suppose, comme dans (41), que $G = 2p\pi$, la somme sera changée en une intégrale de la forme (42), dont les coefficients seront

$$A = i \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta}} (\pm \cos \vartheta b_{\nu, m} + c_{\nu, m}), \quad B = a \frac{\partial A}{\partial \nu},$$

$$Fa = kt + (\nu + \frac{1}{2})G - \frac{\pi}{4} (2m+1 \mp 1) - a \cos \vartheta + 2a \cos \theta + (2m+2)a' \cos \theta',$$

$$H = \frac{a}{2} \left(-\frac{1}{a \cos \vartheta} + \frac{2}{a \cos \theta} - \frac{2m+2}{a' \cos \theta'} \right) = \frac{1}{2 \sin \theta} (-\operatorname{tg} \vartheta + 2 \operatorname{tg} \theta - (2m+2) \operatorname{tg} \theta'),$$

$$I = \frac{1}{6 \sin^2 \theta} (-\operatorname{tg}^3 \vartheta + 2 \operatorname{tg}^3 \theta - (2m+2) \operatorname{tg}^3 \theta'),$$

$$K = \frac{I}{4 \sin \theta} + \frac{1}{8 \sin^3 \theta} (-\operatorname{tg}^5 \vartheta + 2 \operatorname{tg}^5 \theta - (2m+2) \operatorname{tg}^5 \theta').$$

Comme ν est un nombre entier, on pourra aussi, dans Fa , remplacer le terme $(\nu + \frac{1}{2})G$ par $p\pi$, si la condition $G = 2p\pi$ est satisfaite.

Le résultat de l'intégration sera alors donné par la formule (43) et, si l'on a $H = 0$, par (50), ou plus généralement, si $G - 2p\pi$ n'est pas nul mais très petit, par (49).

Les résultats, en ce qui concerne un point intérieur, pourront aussi être déterminés par les mêmes formules en partant de la seconde équation (70), qui conduit pour les coefficients aux valeurs suivantes:

$$A = i \frac{\sin \vartheta'}{\sqrt{\cos \vartheta'}} (\pm \cos \vartheta' \beta_{\nu, m} - (\pm) \gamma_{\nu, m}), \quad B = a \frac{\partial A}{\partial \nu},$$

$$G = \frac{\pi}{2} (2m - (\pm) 1 \mp 1) + (\pm) \vartheta' + \theta - (2m+1)\theta',$$

$$Fa = kt + (\nu + \frac{1}{2})G - \frac{\pi}{4} (2m - (\pm) 1 \mp 1) + (\pm) a' \cos \vartheta' + a \cos \theta - (2m+1) a' \cos \theta',$$

$$H = \frac{1}{2 \sin \theta} ((\pm) \operatorname{tg} \vartheta' + \operatorname{tg} \theta - (2m+1) \operatorname{tg} \theta'),$$

$$I = \frac{1}{6 \sin^2 \theta} ((\pm) \operatorname{tg}^3 \vartheta' + \operatorname{tg}^3 \theta - (2m+1) \operatorname{tg}^3 \theta'),$$

$$K = \frac{I}{4 \sin \theta} + \frac{1}{8 \sin^3 \theta} ((\pm) \operatorname{tg}^5 \vartheta' + \operatorname{tg}^5 \theta - (2m+1) \operatorname{tg}^5 \theta').$$

Les signes entre parenthèses (\pm) sont partout pris pareillement soit pour $+$ soit pour $-$ et sont déterminés d'une manière plus précise par la condition que $G - 2p\pi$ doit être nul ou très petit.

Si nous nous représentons le mouvement ainsi calculé de la lumière sur l'axe principal, produit par la réfraction et la réflexion intérieure de rayons lumineux, ces rayons correspondront à tous ceux qui rencontrent la sphère à une distance $\nu + \frac{1}{2}$ de l'axe principal. L'angle d'incidence correspondra à θ , l'angle de réfraction à θ' , tandis que ϑ et ϑ' seront les angles aigus sous lesquels les rayons rencontrent l'axe principal au point a hors de la sphère ou au point a' en dedans de celle-ci. Après m réflexions intérieures, un rayon incident aura dévié de l'angle

$$A_m = m\pi + 2\theta - (2m+2)\theta'$$

s'il est sorti de la sphère, et de l'angle

$$A'_m = m\pi + \theta - (2m+1)\theta'$$

s'il n'en est pas sorti.

Pour un point extérieur, la condition $G = 2p\pi$ pourra donc aussi, d'après la valeur de G donnée plus haut, être exprimée par

$$A_m = \vartheta + (2p - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2})\pi,$$

équation qui exprime que les rayons ont dévié de l'angle ϑ augmenté soit d'un nombre entier de circonférences, lorsqu'on prend le signe supérieur et que l'axe des x est coupé sur son côté positif, soit d'un nombre impair de demi-circonférences, lorsqu'on prend le signe inférieur et que l'axe des x est coupé sur son côté négatif.

Pour un point intérieur, la condition $G = 2p\pi$ correspondra soit à

$$A'_m = -\vartheta' + (2p + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2})\pi,$$

soit à

$$A'_m = \vartheta' + (2p - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2})\pi.$$

Le dernier cas correspond au précédent, où l'intersection des rayons et de l'axe principal avait lieu hors de la sphère; le premier se présente lorsque les rayons coupent le côté positif ou le côté négatif de l'axe des x , suivant qu'ils ont dévié d'un nombre entier de circonférences augmenté de l'angle obtus $\pi - \vartheta'$, ou d'un nombre impair de demi-circonférences augmenté du même angle, ce qui ne peut avoir lieu pour les intersections hors de la sphère.

On voit par ce qui précède qu'en général tous les cas où un des rayons qui, en dehors des rayons centraux, sont tombés sur la sphère et ont subi m réflexions, peut couper l'axe en un point, sont compris dans la condition $G = 2p\pi$.

Si, pour un point, $G - 2p\pi$ n'est pas nul, mais est une quantité très petite, ce point n'est pas rencontré

directement par les rayons rectilignes réfractés, mais seulement par les rayons infléchis qui interfèrent.

Il a été dit plus haut que, si, d'un point extérieur, nous nous rapprochons de la sphère le long de l'axe principal, nous rencontrerons, peu après avoir dépassé un des foyers des rayons centraux, une amplitude deux fois plus grande que l'amplitude au foyer. En partant de là, on peut maintenant pousser plus loin la détermination du mouvement de la lumière à l'aide des résultats obtenus ci-dessus pour un point extérieur. En supposant ces angles très petits, nous aurons

$$-\vartheta + 2\theta - (2m + 2)\theta' = 0, \text{ et } 2m + 1 \mp 1 = m^{\circ} \text{ de } 4;$$

par conséquent m est pair ou impair suivant qu'on prend le signe supérieur ou le signe inférieur.

On trouve en outre

$$A = i\vartheta 4N \frac{(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}}, \quad Fa = kt - a + 2a - (2m + 2)a',$$

et en développant en série

$$H = \frac{1}{6\theta} (-\vartheta^3 + 2\theta^3 - (2m + 2)\theta'^3).$$

Le résultat donné par (43) deviendra donc

$$A \sqrt{\frac{a\pi}{H}} e^{(Fa + \frac{\pi}{4})i} = i\vartheta 4N \frac{(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}} \sqrt{\frac{6a\theta\pi}{-\vartheta^3 + 2\theta^3 - (2m + 2)\theta'^3}} e^{(Fa + \frac{\pi}{4})i}.$$

Si maintenant on remarque que, les angles étant supposés très petits, on aura d'après (77) $a\theta = a'\theta' = a\vartheta$, il en résulte que l'expression ci-dessus sera précisément le double du résultat trouvé pour le mouvement au foyer, tel qu'il est déterminé par l'équation (74). Le second terme peu important de cette dernière for-

mule a ici été laissé de côté. On voit par là que les résultats obtenus conviennent également à des angles assez petits pour que les formules déduites plus haut pour les rayons centraux leur soient directement applicables. On peut en dire tout autant des points intérieurs.

Lorsque θ ou θ' se rapprochera de la limite supérieure $\frac{\pi}{2}$, H se rapprochera de $\pm \infty$ pour un point tant extérieur qu'intérieur, et le résultat déterminé par (43) convergera par conséquent vers 0. Lorsque, pour un point intérieur, θ' se rapprochera de $\frac{\pi}{2}$, A convergera vers $-(\pm)i \frac{\gamma_{\nu, m}}{2\sqrt{\cos \theta'}}$, H vers $(\pm) \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta'}$ et F_a vers $C + (\pm) \frac{\pi}{4}$, la valeur de C étant

$$C = kt + p\pi - \frac{\pi}{4}(2m \mp 1) + a \cos \theta - (2m + 1)a' \cos \theta'.$$

La formule (43) devient par suite

$$A \sqrt{\frac{a\pi}{H}} e^{(F_a + \frac{\pi}{4})i} = -(\pm)i \frac{\gamma_{\nu, m}}{2\sqrt{\cos \theta'}} \sqrt{\frac{a\pi \cdot 2 \sin \theta \cos \theta'}{(\pm)1}} e^{(C + \frac{\pi}{4}(1 \pm 1))i},$$

expression qui, soit qu'on prenne le signe supérieur ou le signe inférieur, est égale à

$$\frac{1}{2} \gamma_{\nu, m} \sqrt{2\pi a \sin \theta} e^{Ci}.$$

Si maintenant a' est supposé être un point pour lequel θ' devient exactement égal à $\frac{\pi}{2}$, et que l'un des deux signes (\pm) corresponde à un point très voisin $a' + h$, le signe contraire correspondra à un autre point $a' - h$. Mais on voit par ce qui précède que le résultat du calcul sera le même pour ces deux points très voisins et qu'il est indépendant de leur distance au point

a' , d'où l'on peut conclure que les formules trouvées sont encore applicables dans le cas où θ' atteint la limite $\frac{\pi}{2}$.

Les résultats exposés dans ce chapitre comprennent ainsi tous les cas où les rayons lumineux, après avoir été réfléchis et réfractés un nombre quelconque de fois, rencontrent l'axe principal soit directement, soit par interférence dans le voisinage des foyers. Outre ces cas, il peut aussi être question de l'action exercée par la diffraction des rayons qui dépassent le contour de la sphère; mais ces phénomènes de diffraction ne se produisent que dans le voisinage du bord géométrique de l'ombre de la sphère, et ils seront dans un autre chapitre l'objet d'un examen plus détaillé.

Des développements qui précèdent il ressort, comme résultat général, que l'intensité lumineuse correspondant au carré de l'amplitude varie beaucoup aux différents points de l'axe principal, qu'elle est tantôt une grandeur du même ordre que l'unité, c'est-à-dire que l'intensité de la lumière incidente, tantôt une grandeur du même ordre que a aux foyers des rayons centraux et sur les lignes focales des autres rayons, et enfin aussi une grandeur de l'ordre de $a^{\frac{1}{2}}$ à quelques-unes des extrémités des lignes focales. En ces derniers foyers, l'intensité, pour une sphère *infinitement* grande, serait donc plus grande qu'en tout autre point de l'axe (comme aussi en dehors de l'axe); mais en réalité, si nous nous maintenons dans des limites pratiques, l'intensité en ces points est toujours bien moindre qu'au premier foyer des rayons centraux, correspondant à $m = 0$. Si nous prenons comme exemple $N = 1,5$, un pareil foyer extérieur ne se produira qu'après trois réflexions intérieures. En posant $m = 3$, on trouve

$$\theta = 73^{\circ}39'16'',6, \quad \theta' = 39^{\circ}46'15'',8, \quad \theta'' = 9^{\circ}8'26'',8,$$

correspondant à $G = 2\pi$ et à $H = 0$. Si l'on suppose en outre $a = 40000\pi$, la formule (50), en ne prenant que le terme de l'ordre le plus élevé, donnera une amplitude de 24,681* et une intensité de 609,14, tandis que l'intensité au premier foyer est, comme nous l'avons vu, de 217311, par conséquent un grand nombre de fois plus grande.

* NOTE 31

5. Cas de a très grand. Mouvement en dehors de l'axe principal.

Pour la fonction sphérique $P_n(\cos\varphi)$, on a la série connue

$$P_n(\cos\varphi) = 2 \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left(\cos n\varphi + \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{2} \cos(n-2)\varphi + \frac{2n(2n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cos(n-4)\varphi + \dots \right),$$

série qui, pour n impair, se termine par le terme qui renferme $\cos\varphi$ et, pour n pair, par un terme constant dont on prend la moitié.

Nous supposons maintenant ici que φ n'est ni nul ni très petit, et que n est un nombre très grand. La sommation de la série donnera alors, comme on sait, l'expression déjà trouvée par Laplace

$$P_n(\cos\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}} \cos\left((n + \frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

On en déduit, en négligeant les grandeurs d'un ordre inférieur, l'expression

$$\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi} = -\sqrt{\frac{2n}{\pi \sin\varphi}} \sin\left((n + \frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Substituons cette valeur dans les séries (31). Le point considéré étant supposé situé en dehors de l'axe principal, il ne pourra être rencontré par les rayons centraux, qui correspondent à $n < n_1$, et c'est pourquoi on n'a besoin de faire les sommations que de $n = n_1$ à $n = \infty$. Les séries pourront ainsi être exprimées par

$$\left. \begin{aligned} K &= -\frac{\cos\psi}{a} \sum_{n_1}^{\infty} \sqrt{\frac{2q_n(a)}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n + \frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a)\right)i} 2k_n, \\ S &= -i \frac{\sin\psi}{a} \sum_{n_1}^{\infty} \sqrt{\frac{2q_n(a)}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n + \frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a)\right)i} 2s_n, \\ K' &= i \frac{\cos\psi}{a'} \sum_{n_1}^{\infty} \sqrt{\frac{2q_n(a')}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n + \frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2}\right)i} \sin\lambda_n(a') 2k'_n, \\ S' &= \frac{\sin\psi}{a'} \sum_{n_1}^{\infty} \sqrt{\frac{2q_n(a')}{\pi n \sin\varphi}} \sin\left((n + \frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right) e^{\left(kt - \frac{n\pi}{2}\right)i} \sin\lambda_n(a') 2s'_n. \end{aligned} \right\} (79)$$

Nous nous bornerons, dans ce chapitre, à effectuer ces sommations jusqu'à $n = n_2$, c'est-à-dire jusqu'à la limite la plus haute de n au-dessous de laquelle les fonctions q_n et λ_n se laissent exprimer par les formules (67) et (68).

Des séries K et S nous prenons, en procédant comme dans le chapitre précédent, la partie correspondant à

$$2k_n = -1, \quad 2s_n = -1.$$

Les termes dont elles se composent renfermeront les deux exposants

$$\left(kt - \frac{\pi n}{2} - \lambda_n(a) \pm \left((n + \frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right)i.$$

En y posant $n = \nu + z$, les coefficients de z^i deviennent par le développement suivant les puissances de z

$$G = -\vartheta \pm \varphi,$$

où l'angle ϑ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et l'angle φ entre 0 et π , sans qu'il atteignent ces limites. La condition $G = 2p\pi$ ne pourra donc être satisfaite que pour $p = 0$ et $\vartheta = \varphi$. Cela posé, la somme peut être changée en une intégrale de la forme (42), d'après laquelle on obtient par comparaison pour la série K

$$A = \frac{\cos \phi}{2ai} \sqrt{\frac{2}{\pi a \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi}} = -i \frac{\cos \phi}{a \sin \varphi \sqrt{2\pi a \cos \varphi}},$$

$$F\alpha = kt - a \cos \varphi - \frac{\pi}{4}, \quad H = -\frac{a}{2a \cos \varphi}.$$

Le résultat de l'intégration déterminé par (43) devient

$$-\frac{\cos \phi}{a \sin \varphi} e^{(ks - a \cos \varphi)i},$$

en supposant, à cause de l'équation $\vartheta = \varphi$, qu'on a $a \sin \varphi < a$ et $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Dans le cas contraire, le résultat devient nul.

On trouve d'une manière analogue pour la série S

$$i \frac{\sin \phi}{a \sin \varphi} e^{(kt - a \cos \varphi)i}.$$

En substituant ces deux valeurs de K et de S dans les équations (17), et en négligeant les termes d'un ordre inférieur à l'unité, on obtient pour la partie correspondante des composantes $\bar{\xi}_e, \bar{\eta}_e, \bar{\zeta}_e$

$$\bar{\xi}_e = -\sin \varphi \cos \phi e^{(kt - a \cos \varphi)i}, \quad \bar{\eta}_e = -\cos \varphi \cos \phi e^{(kt - a \cos \varphi)i},$$

$$\bar{\zeta}_e = \sin \phi e^{(kt - a \cos \varphi)i},$$

valeurs qui, on le voit, sont égales aux expressions des composantes de la lumière incidente données par les équations (13) avec des signes contraires. Ce résultat indique ainsi seulement que, lorsqu'on ne tient pas compte des rayons réfléchis et réfractés et, par conséquent, que la sphère est considérée comme étant entièrement noire et opaque, il régnera derrière la sphère éclairée une obscurité complète en dehors de l'axe principal, et jusqu'à une certaine distance de ce dernier. Nous avons vu dans le chapitre précédent que tel est aussi le cas même pour l'axe principal.

Nous considérons ensuite le terme des deux premières équations (69) qui correspond à

$$2k_n = -b_n e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = -c_n e^{2\lambda_n(a)i}.$$

Ces valeurs substituées dans les séries K et S donneront des termes avec les deux exposants

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(a) + 2\lambda_n(a) \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right) i,$$

où, par le développement suivant les puissances de z , le coefficient de z^i devient

$$G = -\pi - \vartheta + 2\theta \pm \varphi.$$

Comme on doit avoir $\theta \geq \vartheta$, correspondant à $a \geq a$, la condition $G = 2p\pi$ ne peut être satisfaite que par $p = 0$ et en prenant le signe supérieur. On a donc

$$G = -\pi - \vartheta + 2\theta + \varphi = 0.$$

Pour la somme K , on obtient ensuite, par comparaison avec l'intégrale (42), les coefficients

$$A = -i \frac{\cos \phi b_\nu}{a \sqrt{2\pi a \cos \vartheta \sin \theta \sin \varphi}}$$

$$Fa = kt - a \cos \vartheta + 2a \cos \theta + \frac{\pi}{4}, \quad H = \frac{-\operatorname{tg} \vartheta + 2 \operatorname{tg} \theta}{2 \sin \theta}$$

La valeur de l'intégrale déterminée par (43) devient alors

$$K = \frac{\cos \phi b_\nu}{a \sqrt{\cos \vartheta \sin \varphi (-\operatorname{tg} \vartheta + 2 \operatorname{tg} \theta)}} e^{(kt - a \cos \vartheta + 2a \cos \theta)i}$$

On trouve d'une manière analogue

$$S = \frac{-i \sin \phi c_\nu}{a \sqrt{\cos \vartheta \sin \varphi (-\operatorname{tg} \vartheta + 2 \operatorname{tg} \theta)}} e^{(kt - a \cos \vartheta + 2a \cos \theta)i}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (17) pour la détermination des composantes du mouvement vibratoire, nous pouvons présenter quelques remarques d'une portée plus générale. Lorsque les séries (79) exprimant K et S seront changées en intégrales, les exposants seuls entreront en ligne de compte si l'on différencie par rapport à a et à φ , en négligeant toutes les grandeurs

* NOTE 32. d'un ordre inférieur.* Ces exposants étant désignés par Fai , on a

$$\frac{\partial Fa}{\partial \nu} = G = 2p\pi.$$

Tout multiple de $2\pi i$ pouvant être supprimé dans l'exposant, on aura, en prenant θ pour variable indépendante au lieu de ν , $\frac{\partial Fa}{\partial \theta} = 0$, d'où il suit, si en même temps a est variable, que

* NOTE 33.

$$\frac{\partial Fa}{\partial a} = -\cos \vartheta.*$$

En outre, φ doit entrer dans Fa de manière que l'on ait

$$\frac{\partial Fa}{\partial \varphi} = \pm(\nu + \frac{1}{2}) = \pm a \sin \vartheta,*$$

* NOTE 34.

le signe correspondant à celui avec lequel φ entre dans Fa .

On obtiendra ainsi en général

$$\bar{\xi}_e = \sin^2 \vartheta \cdot aK, \quad \bar{\eta}_e = \pm \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot aK, \quad \bar{\zeta}_e = \mp i \sin \vartheta \cdot aS. \quad (80)$$

En appliquant ces résultats au cas calculé plus haut, on trouve

$$\bar{\xi}_e \cos \vartheta - \bar{\eta}_e \sin \vartheta = 0,$$

$$\bar{\xi}_e \sin \vartheta + \bar{\eta}_e \cos \vartheta = \frac{\cos \phi b_\nu \sin \vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta \sin \varphi (-\operatorname{tg} \vartheta + 2 \operatorname{tg} \theta)}} e^{(kt - a \cos \vartheta + 2a \cos \theta)i},$$

$$\bar{\zeta}_e = -\frac{\sin \phi c_\nu \sin \vartheta}{\sqrt{\cos \vartheta \sin \varphi (-\operatorname{tg} \vartheta + 2 \operatorname{tg} \theta)}} e^{(kt - a \cos \vartheta + 2a \cos \theta)i}$$

Cette partie du mouvement de la lumière correspond au mouvement des rayons réfléchis par la surface antérieure de la sphère, et les mêmes résultats peuvent facilement être obtenus par la voie élémentaire. θ étant l'angle d'incidence, ϑ l'angle aigu que le rayon réfléchi fait avec le rayon vecteur, la loi de la réflexion donnera $-\pi - \vartheta + 2\theta + \varphi = 0$. Le rayon réfléchi a un foyer imaginaire à la distance $\frac{a}{2} \cos \theta$ (mesurée avec $\frac{\lambda}{2\pi}$ comme unité de longueur) de l'élément réfléchissant de la sphère. La distance du point considéré à cet élément est $a \cos \vartheta - a \cos \theta$, et sa distance au foyer $a \cos \vartheta - \frac{1}{2} a \cos \theta$.

Si le point considéré est situé à la surface même de la sphère, on a $\vartheta = \theta = \pi - \varphi$, et, avec le système d'axes que nous avons choisi, les composantes de la lumière incidente sont ici

$$\bar{\xi}_0 = \sin \varphi \cos \phi C, \quad \bar{\eta}_0 = \cos \varphi \cos \phi C, \quad \bar{\zeta}_0 = -\sin \phi C, \\ C = e^{(kt + a \cos \theta)i}.$$

Dans le plan d'incidence, les vibrations sont donc représentées par

$$\bar{\eta}_0 \cos \theta - \bar{\xi}_0 \sin \theta = -\cos \psi C,$$

expression qui, d'après les lois de Fresnel, est changée par la réflexion en

$$\frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta')}{\operatorname{tg}(\theta + \theta')} \cos \psi C = b_\nu \cos \psi C,$$

tandis que les vibrations perpendiculaires au plan d'incidence deviennent après la réflexion

$$\frac{\sin(\theta - \theta')}{\sin(\theta + \theta')} \sin \psi C = -c_\nu \sin \psi C.$$

Dans le rayon réfléchi l'intensité doit ensuite décroître dans le même rapport que croît l'aire sur laquelle la lumière se répand, et l'amplitude, par conséquent, proportionnellement à la racine carrée de cette aire.

Cette aire est, au point considéré, déterminée par

$$\left(a \cos \vartheta - \frac{a}{2} \cos \theta \right) 2 d\theta \cdot a \sin \varphi d\psi,$$

qui, pour $a = a$, à quoi correspond $\vartheta = \theta = \pi - \varphi$, devient

$$a \cos \theta d\theta \cdot a \sin \theta d\psi.$$

Le rapport entre ces deux éléments est

$$\frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{(2a \cos \vartheta - a \cos \theta) a \sin \varphi} = \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta \sin \varphi (-\operatorname{tg} \vartheta + 2 \operatorname{tg} \theta)},$$

a et a étant éliminés par l'équation $a \sin \vartheta = a \sin \theta$.

On voit qu'on arrive ainsi exactement au même résultat qui a été trouvé plus haut.

Si enfin on introduit dans les développements (79) de K et de S le terme général des deux premières séries (69), à savoir

$$k_n = b_{n,m} e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i},$$

$$s_n = c_{n,m} e^{2(\lambda_n(\alpha) - (m+1)\lambda_n(\alpha'))i},$$

les termes renfermeront les exposants

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} - \lambda_n(\alpha) + 2\lambda_n(\alpha) - (2m+2)\lambda_n(\alpha') \pm \left((n + \frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right) i.$$

En développant suivant les puissances de z , le coefficient de z^i deviendra

$$G = m\pi - \vartheta + 2\theta - (2m+2)\theta' \pm \varphi.$$

L'angle dont le rayon incident a dévié après m réflexions intérieures (p. 449) est ici $m\pi + 2\theta - (2m+2)\theta' = 4m$, de sorte que l'équation peut aussi s'écrire $G = 4m - \vartheta \pm \varphi$. On voit par là que la condition $G = 2p\pi$ est remplie quand l'angle d'incidence θ est choisi de façon que le rayon, après m réflexions intérieures, rencontre le point considéré, et qu'on prenne le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que ce point et le rayon incident sont situés du même côté ou du côté opposé de l'axe principal.

Pour la somme K on obtient ensuite, par comparaison avec l'intégrale (42), le coefficient

$$A = \pm i \frac{2 \cos \psi b_{\nu,m}}{a \sqrt{2\pi a \cos \vartheta \sin \theta \sin \varphi}},$$

pour la somme S le coefficient

$$A = \pm \frac{2 \sin \psi c_{\nu,m}}{a \sqrt{2\pi a \cos \vartheta \sin \theta \sin \varphi}},$$

et pour les deux sommes les coefficients

$$Fa = kt - a \cos \vartheta + 2a \cos \theta - (2m+2)a' \cos \theta' + (p - \frac{1}{2}m - \frac{1}{4})\pi,$$

$$H = \frac{1}{2 \sin \theta} (-\operatorname{tg} \vartheta + 2 \operatorname{tg} \theta - (2m+2) \operatorname{tg} \theta'),$$

$$I = \frac{1}{6 \sin^2 \theta} (-\operatorname{tg}^3 \vartheta + 2 \operatorname{tg}^3 \theta - (2m+2) \operatorname{tg}^3 \theta').$$

Le résultat est donné par la formule (43) et, dans le cas où $H = 0$, par la formule (49). Dans le premier cas, le déplacement, dont les composantes sont déterminées par les équations (80), sera du même ordre que l'unité, dans le second cas ($H = 0$), qui représente toutes les caustiques, de l'ordre de $\alpha^{\frac{1}{2}}$, et l'intensité de l'ordre de $\alpha^{\frac{3}{2}}$. Comme toutes les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité ont partout été négligées dans ce calcul, on n'aura donc ici à prendre que le premier terme de la formule (49).

Les conditions du mouvement de la lumière dans le voisinage des caustiques résultent des calculs qui se rattachent à la formule (49) et de la discussion qui les accompagne (p. 427). On voit par là que lorsque H converge vers 0, c'est-à-dire lorsque nous nous rapprochons de la caustique du côté où les rayons rectilignes réfractés et m fois réfléchis peuvent s'étendre ($G = 2p\pi$), l'amplitude des vibrations croîtra par un mouvement périodique de l'ordre de α^0 à l'ordre de $\alpha^{\frac{1}{2}}$. Le dernier et le plus grand maximum est atteint avant que nous atteignons la caustique elle-même, après quoi l'amplitude décroît jusqu'à la valeur déterminée par la formule (50) et correspondant à la caustique ($H = 0$, $G = 2p\pi$). L'amplitude décroît ensuite rapidement jusqu'à 0. Au point maximum, tout près de la caustique, l'amplitude est 1,504, et l'intensité 2,262 fois plus grande que sur la caustique.

La détermination de l'intensité de la lumière sur la caustique et dans son voisinage présentant un intérêt particulier, notamment par rapport à la *théorie de l'arc-en-ciel*, je mettrai les formules sous une forme plus commode pour le calcul numérique.

Désignons par $I_m(\varphi)$ l'intensité des rayons réfléchis m fois par la surface intérieure de la sphère au point déterminé par φ , ψ , α . L'amplitude est déterminée par les équations (80); après quoi on trouve l'intensité, c'est-à-dire le carré de l'amplitude, exprimée par

$$I_m(\varphi) = \alpha^2 \sin^2 \vartheta \operatorname{ampl.} (K^2 + S^2).$$

D'après la formule générale (49), dont on ne prend que le premier terme, on a

$$\operatorname{Ampl.} K^2 = \frac{4 \alpha^{\frac{3}{2}}}{9 I^{\frac{2}{3}}} Q^2 A^2, \quad \text{où } A^2 = \frac{2 \cos^2 \psi b_{\nu, m}^2}{\alpha^2 \pi \cos \vartheta \sin \theta \sin \varphi},$$

$$\operatorname{Ampl.} S^2 = \frac{4 \alpha^{\frac{3}{2}}}{9 I^{\frac{2}{3}}} Q^2 A^2, \quad \text{où } A^2 = \frac{2 \sin^2 \psi c_{\nu, m}^2}{\alpha^2 \pi \cos \vartheta \sin \theta \sin \varphi}.$$

Si la lumière incidente n'est pas polarisée, comme nous le supposons dans ce qui suit, on obtiendra l'intensité en la considérant comme la valeur moyenne correspondant à toutes les valeurs de ψ de 0 à 2π . Nous poserons donc

$$\cos^2 \psi b_{\nu, m}^2 + \sin^2 \psi c_{\nu, m}^2 = \frac{1}{2} (b_{\nu, m}^2 + c_{\nu, m}^2).$$

A l'aide de cette expression et de la valeur de I donnée plus haut, on obtient

$$I_m(\varphi) = \frac{4 \alpha^{\frac{3}{2}} Q^2 \sin^2 \vartheta}{9 \pi \sin \varphi \cos \vartheta \sin \theta} \left(\frac{6 \sin^2 \theta}{-\operatorname{tg}^3 \vartheta + 2 \operatorname{tg}^3 \theta - (2m+2) \operatorname{tg}^3 \theta'} \right)^{\frac{2}{3}} (b_{\nu, m}^2 + c_{\nu, m}^2).$$

En introduisant deux nouvelles notations p et p' , déterminées par

$$\operatorname{tg} \theta = p \operatorname{tg} \theta', \quad N^2 p' = p,$$

on trouve

$$b_{\nu, m} = 2N \cos \theta \cos \theta' \frac{(N \cos \theta - \cos \theta')^m}{(N \cos \theta + \cos \theta')^{m+2}} = 2p' \frac{(1-p')^m}{(1+p')^{m+2}},$$

$$c_{\nu, m} = 2N \cos \theta \cos \theta' \frac{(\cos \theta - N \cos \theta')^m}{(\cos \theta + N \cos \theta')^{m+2}} = 2p \frac{(1-p)^m}{(1+p)^{m+2}}.$$

Les angles θ , θ' et ϑ sont en même temps déterminés par

$$\sin \theta = N \sin \theta' = \sqrt{\frac{p^2 - N^2}{p^2 - 1}}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = 2(p - m - 1) \operatorname{tg} \theta',$$

de même qu'on a

$$a \sin \vartheta = a \sin \theta, \quad a \lambda = 2\pi R, \quad a \lambda = 2\pi r,$$

R étant le rayon de la sphère, r la distance du point au centre, tous deux mesurés comme λ avec une unité de longueur arbitraire, et (voir p. 427)

$$Q = 3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} W.$$

Par ces substitutions, la formule de l'intensité peut prendre la forme

$$I_m(\varphi) = \frac{W^2}{\sin \varphi} C_m, \quad (a)$$

où C_m est indépendant de φ et déterminé par

$$\left. \begin{aligned} C_m &= \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{48 p^2 (N^2 - 1)}{\cos \vartheta (p^2 - 1)} \left(\frac{R (p^2 - N^2)^{\frac{1}{2}}}{6 \lambda (p^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (p^2 - 4(p - m - 1)^2 - m - 1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(p'^2 \frac{(1-p')^{2m}}{(1+p')^{2m+4}} + p^2 \frac{(1-p)^{2m}}{(1+p)^{2m+4}} \right), \\ \cos \vartheta &= \frac{p \sqrt{N^2 - 1}}{\sqrt{p^2 (N^2 - 1) + 4(p - m - 1)^2 (p^2 - N^2)}} \end{aligned} \right\} (b)$$

La quantité W introduite dans la formule (a) est déterminée par

$$W = \int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} (\omega^3 - \mu \omega) d\omega,$$

où μ dépend de φ de la manière suivante: on suppose que φ_0 est une valeur de φ correspondant à la caustique et, par conséquent, déterminée par

$$G = m\pi - \vartheta + 2\theta - (2m + 2)\theta' \pm \varphi_0 = 2p_1\pi,$$

où p_1 est un nombre entier. Le signe de φ_0 , qui est compris entre 0 et π , est déterminé par l'équation même.

En posant maintenant $\varphi = \varphi_0 \mp \delta$, on obtient $G - 2p_1\pi = -\delta$; mais d'après (46) on a

$$G - 2p_1\pi = -\varepsilon \left(\frac{I}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{où } \varepsilon = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \mu.$$

On obtient ainsi, en introduisant en même temps la valeur donnée de I ,

$$\delta = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \mu \left(\frac{-\operatorname{tg}^3 \vartheta + 2 \operatorname{tg}^3 \theta - (2m + 2) \operatorname{tg}^3 \theta'}{6 a^2 \sin^2 \theta} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et avec les substitutions employées plus haut

$$\delta = \mu \left(\frac{\lambda^2 (p^2 - 1) (p^2 - 4(p - m - 1)^2 - m - 1) (p^2 - N^2)^{\frac{1}{2}}}{48 R^2 p^2 (N^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (c)$$

Dans le cas où a peut être considéré comme infiniment grand (*l'arc-en-ciel*), on a $\vartheta = 0$, $p = m + 1$, de sorte que les formules (b) et (c) se réduisent à

$$\left. \begin{aligned} C_m &= \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{48 p^2 (N^2 - 1)}{p^2 - 1} \left(\frac{R (p^2 - N^2)^{\frac{1}{2}}}{6 \lambda p^2 (p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(p'^2 \frac{(1-p')^{2m}}{(1+p')^{2m+4}} + p^2 \frac{(1-p)^{2m}}{(1+p)^{2m+4}} \right), \\ \delta &= \mu \left(\frac{\lambda^2 (p^2 - 1) (p^2 - N^2)^{\frac{1}{2}}}{48 R^2 p^2 (N^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} (b')$$

L'équation $W = 0$, qui correspond à $I_m(\varphi) = 0$, donne, comme il a été dit p. 426, une série de valeurs de μ , dont celle de l'ordre q , pour des valeurs suffisamment grandes de q , est déterminée par $\mu = 3(q - \frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$. A cette valeur correspondra

$$\delta = \frac{1}{4} \left(\frac{9}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{(p^2 - 1)^2 (p^2 - N^2)^{\frac{1}{2}}}{p^2 (N^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\lambda}{R} (4q - 1) \right)^{\frac{2}{3}}$$

forme sous laquelle le résultat, obtenu par la voie élémentaire, a dernièrement été exposé par M. Boitel*, avec cette différence toutefois que, dans le premier membre de l'équation, δ est, chez M. Boitel, remplacé par $\text{tg } \delta$. Par contre M. Mascart**, dans le calcul de quelques expériences faites avec une tige de verre, s'est servi de la formule $\delta = A(q - \frac{1}{4})^{\frac{2}{3}}$ et a trouvé, même pour d'assez grandes valeurs de δ (9°), un accord satisfaisant entre l'expérience et le calcul.

L'intensité sur la caustique même ($\mu = 0$) est déterminée par

$$I_m(\varphi_0) = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})^2}{12} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{C_m}{\sin \varphi_0},$$

d'où l'on peut, avec une approximation suffisante, en multipliant par 2,262, déduire l'intensité maximum, correspondant à $\mu = 1,0845$ (la valeur de φ correspondant à cette valeur de μ différant très peu de φ_0). J'ai de cette manière calculé l'intensité maximum dans quelques exemples.

Soit $R = 10^{\text{mm}}$, $N = 1,5$, $\lambda = 0^{\text{mm}},0005$, $m = 1$. Pour un point immédiatement extérieur à la surface

* Journ. de phys., 2^e sér., t. 8, p. 232. 1889.

** Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 106, p. 1575. 1888.

de la sphère, on a $r = R$, $\vartheta = \theta$, $\text{tg } \theta = 4 \text{tg } \theta'$ et par conséquent $p = 4$, $p' = \frac{16}{9}$; C_m étant déterminé par la formule (b), on trouve avec ces valeurs que l'intensité est égale à 4,5423. Cette intensité étant proportionnelle à $R^{\frac{1}{2}}$, on voit que, même pour des sphères presque 100 fois plus petites, l'intensité sera plus grande que 1. A la distance d'un demi-rayon de la surface de la sphère, on a $r = 1,5 R$, $\vartheta = \theta'$, $p = \frac{5}{2}$, $p' = \frac{10}{9}$, valeurs auxquelles correspond une intensité maximum de 0,9423.

Il ressort de ces résultats que, pour ainsi dire dans tous les cas de sphères transparentes qui se présentent, on pourra trouver hors de la sphère des points qui sont *tout aussi fortement* éclairés d'un côté par la lumière directe incidente que de l'autre par la lumière réfléchie une fois par la surface intérieure de la sphère. Comme il sera sans doute facile de trouver expérimentalement de pareils points, et qu'ils pourront également être déterminés théoriquement par les formules données plus haut, on aura un moyen pour contrôler l'accord entre l'expérience et le calcul.

Pour second exemple je prendrai une goutte d'eau sphérique avec l'indice de réfraction $\frac{4}{3}$. Pour $m = 1$ et a infiniment grand on trouve:

$$\text{Intensité maximum} = 0,06728 \frac{R^2}{r^2} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Si l'on prend comme comparaison une seconde sphère de même grandeur à réflexion totale, l'intensité de la lumière réfléchie par la surface antérieure sera, à la même distance, de $\frac{R^2}{4r^2}$. Ces deux intensités seront donc égales si l'on a $R = 51,30 \lambda$, ce qui, pour

$\lambda = 0^{\text{mm}},000585$, donne $R = 0^{\text{mm}},03$. Pour une goutte de pluie d'un rayon 8 fois plus grand, l'intensité maximum de la lumière réfléchie une fois par la surface intérieure serait le double de celle qu'on obtiendrait en remplaçant la goutte de pluie par une sphère de même grandeur produisant une réflexion totale.

Au lieu d'une seule sphère, figurons-nous maintenant un assemblage de sphères égales isolées, toutes aussi fortement éclairées par des rayons incidents parallèles non polarisés d'une intensité égale à 1. Les sphères sont supposées si voisines ou former une couche d'une étendue telle que les lignes visuelles d'un observateur éloigné rencontrent partout une des sphères. L'ensemble des sphères renfermées dans un cône dont le sommet est dans l'œil de l'observateur, et qui comprend l'unité d'angle solide, enverra alors une lumière dont l'intensité au sommet du cône est $\frac{r^2}{\pi R^2}$ fois plus grande que celle qui est due à une seule sphère. En appelant l'intensité de la lumière qui, en dedans de l'unité d'angle solide, rencontre l'œil de l'observateur, la *clarté apparente*, nous aurons donc pour un pareil assemblage de gouttes de pluie sphériques avec l'indice de réfraction $\frac{4}{3}$:

$$\text{Max. de clarté apparente} = 0,06728 \frac{1}{\pi} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour un assemblage analogue de sphères produisant une réflexion totale, on obtiendrait la clarté apparente $\frac{1}{4\pi}$, indépendante de la grandeur des sphères. Mais, en faisant la comparaison, il faut observer que toute la lumière qui rencontre le système après une seule réflexion est renvoyée par de nouvelles réflexions, et c'est pourquoi il convient de doubler la clarté apparente ou de la

poser égale à $\frac{1}{2\pi}$. Cela posé, les deux systèmes éclairés par une lumière simple ou regardés à travers un verre unicolore seront vus avec la même clarté apparente, lorsque le rayon des gouttes de pluie est 8 fois plus grand, comme on l'a calculé plus haut, et qu'il est par conséquent de $0^{\text{mm}},24$.

Les phénomènes lumineux, dans l'assemblage de gouttes de pluie que nous considérons ici, correspondent à des *arcs-en-ciel complètement développés*. Le calcul de la clarté apparente de ces *arcs-en-ciel* et des *arcs-en-ciel surnuméraires* pourra se faire, pour les différentes couleurs du spectre, à l'aide des formules (a), (b'), (c'), conjointement avec une table des valeurs de l'intégrale W . Nous ajouterons enfin, comme exemple permettant de contrôler les observations, que le second arc-en-ciel, après deux réflexions intérieures, a une clarté apparente 7,864 plus faible que le premier arc-en-ciel, supposé bien entendu qu'ils sont formés dans les mêmes conditions.

Le mouvement de la lumière à l'intérieur d'une sphère devra être déterminé à l'aide des séries K' et S' (70), en y posant

$$\begin{aligned} k'_n &= \beta_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha'))i} \\ s'_n &= \gamma_{n,m} e^{(\lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha'))i} \end{aligned}$$

Dans les termes figureront les quatre exposants

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} + (\pm)\lambda_n(\alpha') + \lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha') \pm \left((n+\frac{1}{2})\varphi - \frac{\pi}{4} \right) i \right),$$

qui, par le développement suivant les puissances de z , donnent pour le coefficient de z^i

$$G = (2m-1)\frac{\pi}{2} + (\pm)\left(\vartheta' - \frac{\pi}{2}\right) + \theta - (2m+1)\vartheta' \pm \varphi.$$

Dans cette expression $m\pi + \theta - (2m + 1)\theta' = \mathcal{A}'_m$ est l'angle dont le rayon incident est dévié après m réflexions intérieures. La condition $G = 2p\pi$ lève l'ambiguïté des deux doubles signes, et on voit que, de même que pour un point extérieur, le signe supérieur de φ correspond au cas où le point considéré et le rayon incident sont du même côté de l'axe principal, et que θ' et φ ont le même signe ou un signe contraire suivant que le rayon qui rencontre le point considéré coupe le côté positif ou le côté négatif de l'axe principal.

En comparant avec l'intégrale (42), on obtient ensuite pour les séries K' et S' respectivement les coefficients

$$A = \mp (\pm) \frac{i \cos \phi \beta_{\nu, m}}{a' \sqrt{2\pi a \cos \theta' \sin \theta \sin \varphi}}$$

et

$$A = \mp (\pm) \frac{\sin \phi \gamma_{\nu, m}}{a' \sqrt{2\pi a \cos \theta' \sin \theta \sin \varphi}},$$

et pour les deux séries

$$Fa = kt + (\pm) \left(a' \cos \theta' + \frac{\pi}{4} \right) + a \cos \theta - (2m + 1) a' \cos \theta' + \left(p - \frac{1}{2} m + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{4} \right) \pi,$$

$$H = \frac{1}{2 \sin \theta} ((\pm) \lg \theta' + \lg \theta - (2m + 1) \lg \theta'),$$

$$I = \frac{1}{6 \sin^2 \theta} ((\pm) \lg^3 \theta' + \lg^3 \theta - (2m + 1) \lg^3 \theta').$$

Les composantes du mouvement vibratoire $\bar{\xi}'$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\zeta}'$ sont déterminées par les équations suivantes analogues à (80), à savoir

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}' &= \sin^2 \theta' a' K', & \bar{\eta}' &= \mp (\pm) \sin \theta' \cos \theta' a' K', \\ \bar{\zeta}' &= \mp i a' \sin \theta' S'. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Le mouvement de la lumière est ainsi déterminé partout en tant qu'il est suffisant de faire les somma-

tions par rapport à n sans dépasser la limite $n = n_2$, ce qui présuppose qu'on peut se servir des expressions (67) et (68) de q_n et de λ_n , lesquelles à leur tour déterminent les fonctions v_n et w_n . Si cette limite de n doit être franchie, il devient nécessaire de recourir à d'autres développements pour ces fonctions, et c'est ce que je ferai dans le chapitre suivant.

Je ferai seulement encore remarquer que, lorsque θ' atteint la limite $\frac{\pi}{2}$ en des points intérieurs *isolés*, le mouvement se laisse aussi calculer par les formules données plus haut, ce qu'on peut prouver de la même manière que dans le cas déjà traité (p. 452), quand le point était situé sur l'axe principal.

6. Suite. Réflexion totale, diffraction.

Les fonctions v_n et w_n peuvent aussi être déterminées d'une manière autre que celle que nous avons employée précédemment (p. 435), par un développement d'ailleurs tout à fait correspondant. On a identiquement

$$v_n = \sqrt{v_n w_n} e^{\frac{1}{2} \log \frac{v_n}{w_n}}, \quad w_n = \sqrt{v_n w_n} e^{-\frac{1}{2} \log \frac{v_n}{w_n}}.$$

Si l'on pose

$$v_n w_n = r_n, \quad \frac{1}{2} \log \frac{v_n}{w_n} = \mu_n,$$

on aura donc

$$v_n = \sqrt{r_n} e^{\mu_n}, \quad w_n = \sqrt{r_n} e^{-\mu_n}. \quad (82)$$

En se servant de l'équation $w_n v'_n - w'_n v_n = 1$, on obtiendra en outre, la variable étant désignée par a ,

$$\frac{d\mu_n}{da} = \frac{1}{2r_n}, \quad (83)$$

d'où, en intégrant et en introduisant la valeur de μ_n correspondant à $a = 0$, on tire

$$\mu_n = \frac{1}{2} \log \frac{a^{2n+1}}{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1)} + \int_0^a da \left(\frac{1}{2r_n} - \frac{2n+1}{2a} \right). \quad (84)$$

Les développements (22) et (24) de r_n et de w_n donnent en outre par multiplication

$$2r_n = \frac{2a}{2n+1} + \frac{(2a)^2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(2a)^3}{(2n-3)(2n-1) \dots (2n+5)} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots \quad (85)$$

L'exactitude de la loi indiquée ici pour la série pourrait aussi être démontrée par la formation de l'équation différentielle à laquelle satisfait r_n . En supposant que u_n satisfasse à l'équation différentielle (21), on peut poser d'une manière plus générale

$$u_n = \sqrt{p_n} e^{\int c da}, \quad (86)$$

valeur qui, substituée dans (21), conduit à l'équation

$$p_n \frac{d^2 p_n}{da^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dp_n}{da} \right)^2 + \left(1 - \frac{n(n+1)}{a^2} \right) 2p_n^2 + 2c^2 = 0, \quad (87)$$

d'où, par une nouvelle différentiation, résulte l'équation linéaire

$$\frac{d^3 p_n}{da^3} + 4 \left(1 - \frac{n(n+1)}{a^2} \right) \frac{dp_n}{da} + \frac{4n(n+1)}{a^3} p_n = 0. \quad (88)$$

L'équation (86) correspond aux équations (82) pour $p_n = r_n$ et $c = \pm \frac{1}{2}$, de même qu'elle correspond aux équations (63) pour $p_n = q_n$ et $c = \pm i$. La dernière équation (88) doit donc être satisfaite aussi bien pour $p_n = q_n$ que pour $p_n = r_n$, et alors il ne sera pas diffi-

cile, à l'aide de cette équation, de contrôler l'exactitude des lois des séries indiquées q_n et r_n .

Aussi bien n que a sont considérés comme de grands nombres, tous deux de l'ordre de a . Si, de même qu'au-paravant pour la sommation de la série q_n , nous négligeons toutes les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité, la série (85) pourra, sous certaines conditions, être sommée par

$$2r_n = \frac{a}{\sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 - a^2}}. \quad (89)$$

La condition doit consister en ceci, que a ne doit pas dépasser une certaine limite; mais en examinant de plus près la série, on remarquera bientôt que la détermination de cette limite présente quelques difficultés. En effet les termes de la série, pour $a < n$, décroissent d'abord et atteignent un minimum; après quoi ils croissent, changent alternativement de signe et atteignent un maximum pour finalement décroître jusqu'à 0. Ainsi le terme qui précède le premier terme négatif a déjà atteint la grandeur

$$\frac{(2a)^{2n+1}}{1 \cdot 3 \dots (4n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n},$$

qui, pour $ea > 2n+1$, a étant par exemple égal à $0,75n$ et n allant en croissant, croît jusqu'à l'infini.*

* NOTE 35.

Il sera donc nécessaire de mettre la série r_n sous une autre forme. A l'aide de l'équation

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2m}{(2n-2m+1)(2n-2m+3) \dots (2n+2m+1)} = (-1)^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x \sin^{2m}x,$$

on peut donner à la série (85) la forme

$$2r_n = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x \left(1 - \frac{a^2}{1^2} \sin^2 x + \frac{a^4}{1^2 \cdot 2^2} \sin^4 x - \dots \right),$$

et en employant la fonction J_0 de Bessel, cette expression devient

$$2r_n = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(2n+1)x \cdot J_0(2a \sin x). \quad (90)$$

Nous effectuerons cette intégration d'abord depuis $x = 0$ jusqu'à $x = h$, h étant assez petit pour qu'on puisse sans erreur sensible remplacer $\sin x$ par x , tant que x est plus petit que h . Cette partie de l'intégrale, par l'introduction d'une nouvelle variable $y = (2n+1)x$, deviendra ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{a}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{(2n+1)h} dy \sin y J_0\left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{a}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{(2n+1)h} dy \sin y \left(1 - \left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right)^2 \frac{1}{2^2} + \left(\frac{ay}{n+\frac{1}{2}}\right)^4 \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} - \dots\right). \quad (91) \end{aligned}$$

La limite supérieure de cette intégrale pourra être considérée comme appartenant à cette espèce de grandeurs arbitraires et indéterminées auxquelles nous avons donné la désignation commune ω , et l'intégration pourra par suite se faire par la formule (39). Le résultat est la série

$$\frac{a}{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)^3 \frac{1}{2} + \left(\frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)^5 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots = \frac{a}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2 - a^2}},$$

où la seule condition de convergence est $a < n + \frac{1}{2}$.

Dans la seconde partie de l'intégrale (90), la fonction de Bessel peut être développée suivant les puissances décroissantes de a en la série semi-convergente connue

$$J_0(2a \sin x) = \frac{1}{\sqrt{\pi a \sin x}} \cos\left(2a \sin x - \frac{\pi}{4}\right) + \dots$$

où les termes sont de l'ordre de $a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{3}{2}}$, ...

Cette partie de l'intégrale, en négligeant les termes suivants de la fonction J_0 , deviendra donc

$$\begin{aligned} & \frac{a}{n+\frac{1}{2}} \int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy \frac{\sin y \cos\left(2a \sin \frac{y}{2n+1} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi a \sin \frac{y}{2n+1}}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{(2n+1)\pi}} \int_{(2n+1)h}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} dy \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y - \frac{ay^2}{24(n+\frac{1}{2})^3} + \dots - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\left(1 - \frac{a}{n+\frac{1}{2}}\right)y + \frac{ay^2}{24(n+\frac{1}{2})^3} - \dots - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y - \frac{y^3}{24(n+\frac{1}{2})^2} + \dots}}. \quad (92) \end{aligned}$$

On voit par là que cette partie de l'intégrale sera d'un ordre inférieur à l'unité tant que la différence $n + \frac{1}{2} - a$ est de l'ordre de a^* , et comme l'équation (89) * NOTE 36. présuppose que ces grandeurs n'entrent pas en ligne de compte, cette dernière équation restera valable, pourvu seulement que la différence $n + \frac{1}{2} - a$ soit positive et de l'ordre de a . Cette condition correspond ainsi complètement, avec l'échange de a et de $n + \frac{1}{2}$, à celle concernant q_n dans l'équation (67).

Si, dans l'équation (84), on pose

$$1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1) = 2(2n+1)^{2n+1} e^{-(2n+1)*}, \quad * \text{ NOTE 37.}$$

n étant supposé très grand, on obtient à l'aide de l'équation (89)

$$\mu_n = -\frac{1}{2} \log 2 + (n + \frac{1}{2}) \log \frac{n + \frac{1}{2} - \sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 - a^2}}{a} + \sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 - a^2}. \quad (93)$$

Nous sommes ainsi à même de déterminer les fonctions v_n et w_n tant pour $n + \frac{1}{2} > a$ que pour $n + \frac{1}{2} < a$, dans le premier cas à l'aide de r_n et de μ_n , dans le second à l'aide de q_n et de λ_n . Mais il reste encore un cas où ces fonctions ne sont pas déterminées par les formules précédentes, à savoir lorsque la différence $n + \frac{1}{2} - a$, qu'elle soit positive ou négative, est d'un ordre inférieur à celui de a .

Tandis que jusqu'ici nous avons sommé toutes nos séries avec une exactitude telle que les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité ont seules été négligées, nous nous bornerons, dans ce qui suit, à considérer les termes de l'ordre le plus élevé. Cela posé, quand $n + \frac{1}{2} - a$ sera d'un ordre inférieur à a , on pourra dans la détermination de r_n rejeter toutes les grandeurs du même ordre que l'unité, puisque r_n sera une grandeur d'un ordre plus élevé. Par conséquent, si nous considérons la limite choisie $(2n + 1)h$ comme une grandeur de l'ordre de a^2 , toute l'intégrale (91) pourra être négligée, les deux fonctions qui y entrent, le sinus et J_0 , ne pouvant, pour aucune valeur de la variable, devenir numériquement plus grandes que 1. En outre, la seconde partie de l'intégrale, déterminée par (92), se réduira à

$$\sqrt{\frac{a}{(2n + 1)\pi}} \int_{(2n + 1)h}^{(2n + 1)\frac{\pi}{2}} dy \frac{\sin\left(\left(1 - \frac{a}{n + \frac{1}{2}}\right)y + \frac{ay^3}{24(n + \frac{1}{2})^3} - \dots + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y - \frac{y^3}{24(n + \frac{1}{2})^3} + \dots}}, \quad (94)$$

où la limite inférieure peut encore être remplacée par 0, puisque l'intégration de 0 à $(2n + 1)h$ ne peut non plus conduire à un résultat d'un ordre plus élevé que l'unité, tandis que la limite supérieure de x , après la substitution de $ay^3 = 24(n + \frac{1}{2})^3 x$, peut comme auparavant être désignée par ω . On obtient ainsi, en négligeant tous les termes qui ne conduisent qu'à des résultats d'un ordre inférieur,

$$2r_n(a) = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} \int_0^\omega dx x^{-\frac{1}{2}} \sin\left((n + \frac{1}{2} - a)\left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + x + \frac{\pi}{4}\right). \quad (95)$$

En développant suivant les puissances de $n + \frac{1}{2} - a$ et en intégrant à l'aide de l'équation (39), on trouve alors

$$2r_n(a) = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \sin \frac{\pi}{3} + \Gamma\left(\frac{3}{6}\right) \sin \frac{3\pi}{3} \cdot \left(n + \frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1} \right. \\ \left. + \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \sin \frac{5\pi}{3} \cdot \left(n + \frac{1}{2} - a\right)^2 \left(\frac{24}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots \right], \quad (96)$$

série dans laquelle les 2^e, 5^e, 8^e, ... termes sont égaux à 0.

Pose-t-on, par exemple, $a = n + \frac{1}{2}$, il vient

$$2r_n(n + \frac{1}{2}) = c(n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}, \quad c = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \sqrt{3}}{3^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi} \cdot 2} = 1,08874, \quad \log c = 0,0369226. \quad (97)$$

En substituant dans $r_n = v_n w_n$ les développements (23) et (25) de v_n et w_n , j'ai calculé le tableau ci-dessous, qui déjà pour les plus petites valeurs de n , montre un accord surprenant entre les véritables valeurs de $r_n(n + \frac{1}{2})$ et celles qui ont été calculées par les formules (97):

n	=	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$2r_n(n + \frac{1}{2})$	=	0,8415,	1,2416,	1,4756,	1,6518,	1,7967,	1,9212,	2,0314,
$c(n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$	=	0,8641,	1,2463,	1,4776,	1,6530,	1,7975,	1,9218,	2,0319.

Il est à remarquer que lorsque $n + \frac{1}{2} - a$ sera d'un ordre supérieur à celui de $a^{\frac{1}{3}}$, l'ordre de grandeur des termes ira en croissant. Mais dans cette supposition, l'intégrale (94), par la substitution de $\left(1 - \frac{a}{n + \frac{1}{2}}\right)y = x$, sera réduite à

$$2r_n = \sqrt{\frac{a}{(2n + 1 - 2a)\pi}} \int_0^\omega \frac{dx}{\sqrt{x}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2a(n + \frac{1}{2} - a)}}; \quad (98)$$

valeur qui montre que nous pouvons de nouveau revenir à la formule plus simple (89) de r_n , cette formule conduisant au même résultat, lorsqu'on ne tient compte que des termes de l'ordre le plus élevé. Avec cette exactitude plus limitée, elle continue donc à être appli-

cable tant que la différence $n + \frac{1}{2} - a$ est d'un ordre plus élevé que celui de $a^{\frac{1}{2}}$. Lorsque cette différence n'est pas d'un ordre inférieur à celui de a , $r_n(a)$ n'est jamais d'un ordre supérieur que celui de l'unité. En effet, si elle est positive, cela résulte de l'équation (89), et si elle est négative, on arrive au même résultat en exprimant, dans l'équation $r_n = v_n w_n$, v_n et w_n par les équations (23) et

- * NOTE 38. (25).* Par contre, si la différence $n + \frac{1}{2} - a$ est d'un ordre moins élevé que celui de a , $r_n(a)$ peut être d'un ordre plus élevé que celui de l'unité, et d'après (96), cette fonction atteindra finalement par la variation de n sa plus haute valeur pour $n + \frac{1}{2} = a$.
- * NOTE 39. Dans le développement (66)* de q_n , le terme général, lorsque $n + \frac{1}{2} - a$ est d'un ordre moins élevé que celui de a , pourra être déterminé par

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2) \dots (n+m) \cdot 1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{a^{2m} \cdot 2 \cdot 4 \dots 2m} = \frac{e^{-2m} (n + \frac{1}{2} + m)^{n+\frac{1}{2}+m}}{\sqrt{\pi m} a^{2m} (n + \frac{1}{2} - m)^{n+\frac{1}{2}-m}}$$

En remplaçant la sommation par une intégration, on obtiendra

$$q_n(a) = \int_0^a \frac{dm}{\sqrt{\pi m}} e^{F(m)}, F_m = -2m+m \log \frac{(n + \frac{1}{2})^2 - m^2}{a^2} + (n + \frac{1}{2}) \log \frac{n + \frac{1}{2} + m}{n + \frac{1}{2} - m},$$

ou en développant suivant les puissances de m

$$F(m) = -2m \log \frac{a}{n + \frac{1}{2}} - 2 \left(\frac{m^2}{(n + \frac{1}{2})^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{m^4}{(n + \frac{1}{2})^4} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots \right).$$

Si l'on pose ensuite $m^2 = 3(n + \frac{1}{2})^2 x$, l'intégrale pourra,

- * NOTE 40. avec l'exactitude requise ici, être réduite à*

$$q_n(a) = \frac{(n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a^2}{3(n + \frac{1}{2})^2}} dx x^{-\frac{5}{6}} e^{-\frac{(24)^{\frac{1}{2}} (n + \frac{1}{2})^{\frac{3}{2}} \log \frac{a}{n + \frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} - x}.$$

On pourra également ici avec une exactitude suffisante poser $\log \frac{a}{n + \frac{1}{2}} = \frac{a - n - \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}}$ après quoi l'intégration conduit au résultat

$$q_n(a) = \frac{(n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) + \Gamma\left(\frac{3}{6}\right) \left(n + \frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{24}{n + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1} + \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \left(n + \frac{1}{2} - a\right)^2 \left(\frac{24}{n + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots \right]. \quad (99)$$

Si, dans cette expression, on pose $a = n + \frac{1}{2}$, on trouve avec la même signification de c que plus haut

$$q_n(n + \frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}} c (n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}, \quad \log \frac{2}{\sqrt{3}} c = 0,0993920. \quad (100)$$

On constate également ici, déjà pour les plus petites valeurs de n , un bon accord avec les valeurs exactes de $q_n(n + \frac{1}{2})$ calculées directement par la série (66); c'est ce que montre le tableau suivant:

n	=	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$q_n(n + \frac{1}{2})$	=	1,0000,	1,4444,	1,7104,	1,9121,	2,0783,	2,2215,	2,3482,
$\frac{2c}{\sqrt{3}} (n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$	=	0,9978,	1,4391,	1,7062,	1,9087,	2,0755,	2,2191,	2,3462.

Par analogie avec r_n , q_n pourra être exprimé avec la même exactitude limitée par l'équation (67), tant que la différence $a - (n + \frac{1}{2})$ est d'un ordre plus élevé que celui de $a^{\frac{1}{2}}$; mais, en opposition avec r_n , q_n a une valeur toujours croissante quand n croît.

Au moyen des valeurs ainsi trouvées pour r_n et q_n , on peut calculer aussi bien λ_n et μ_n que v_n et w_n . A l'aide des équations $2r_n = 2v_n w_n = q_n \sin 2\lambda_n$, on trouve $\sin 2\lambda_n (n + \frac{1}{2}) = \sin \frac{\pi}{3}$, d'où résultent pour $\lambda_n (n + \frac{1}{2})$ les valeurs $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} \dots$; mais en déterminant $\lambda_n (n + \frac{1}{2})$ par les équations $v_n = \sqrt{q_n} \sin \lambda_n$, $w_n = \sqrt{q_n} \cos \lambda_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, on trouve respectivement

$$\lambda_n (n + \frac{1}{2}) = 0,5, \quad 0,5165, \quad * \quad 0,5203, \quad 0,5215, \quad \dots \quad * \text{ NOTE 41.}$$

Cette série converge évidemment vers la plus petite des valeurs ci-dessus indiquées, c'est-à-dire vers

$$\lambda_n(n + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} = 0,5236, \quad (101)$$

d'où résulte encore à l'aide des équations $v_n^2 = r_n e^{2\mu_n} = q_n \sin^2 \lambda_n$,

$$\mu_n(n + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} \log 3. \quad (102)$$

Comme on a $\lambda'_n(a) = \frac{1}{q_n(a)}$ et $\mu'_n(a) = \frac{1}{2r_n(a)}$, les développements en série de $\lambda_n(a)$ et de $\mu_n(a)$, en désignant pour abréger $q_n(n + \frac{1}{2})$, $r_n(n + \frac{1}{2})$, $q'_n(n + \frac{1}{2})$, etc., par q , r , q' , ..., deviendront maintenant

$$\lambda_n(a) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{q} \frac{a-n-\frac{1}{2}}{1} - \frac{q'(a-n-\frac{1}{2})^2}{q^2 \cdot 1 \cdot 2} + \dots, \quad (103)$$

$$\mu_n(a) = -\frac{1}{4} \log 3 + \frac{1}{2r} \frac{a-n-\frac{1}{2}}{1} - \frac{r'(a-n-\frac{1}{2})^2}{2r^2 \cdot 1 \cdot 2} + \dots, \quad (104)$$

où q' , r' et les coefficients plus élevés de $q_n(a)$ et de $r_n(a)$ par rapport à a devront, pour $a = n + \frac{1}{2}$, être calculés à l'aide des équations (99) et (96). On trouve ainsi $q' = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $r' = \frac{r}{3(n + \frac{1}{2})}$; cette dernière valeur est seulement de l'ordre de $a^{-\frac{2}{3}}$ et doit par conséquent être regardée comme nulle.

Les fonctions v_n et w_n peuvent être déterminées par les équations $(v_n \pm w_n)^2 = q_n \pm 2r_n$. les signes de v_n et de w_n , qui ici sont indéterminés, étant déterminés par $v_n = \sqrt{q_n} \sin \lambda_n$ et $w_n = \sqrt{q_n} \cos \lambda_n$, où $\sqrt{q_n}$ est positif. Les développements en série que j'ai trouvés par cette voie à l'aide des séries (96) et (99). où, en dehors de la différence $n + \frac{1}{2} - a$, les deux quantités $n + \frac{1}{2}$ et a peuvent être considérées comme égales, sont les suivants:

$$v_n(a) = C \left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} + \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cos \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{\varepsilon}{1} + \Gamma\left(\frac{3}{3}\right) \cos \frac{9\pi}{6} \cdot \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} + \dots \right), \quad (105)$$

$$w_n(a) = C \left(\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(1 + \sin \frac{\pi}{6}\right) + \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(1 + \sin \frac{5\pi}{6}\right) \frac{\varepsilon}{1} + \Gamma\left(\frac{3}{3}\right) \left(1 + \sin \frac{9\pi}{6}\right) \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} + \dots \right), \quad (106)$$

où

$$C = \left(\frac{a}{6}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt[3]{3}\pi}, \quad \varepsilon = \left(\frac{6}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \left(n + \frac{1}{2} - a\right).$$

Ces séries peuvent aussi être facilement ramenées aux intégrales définies

$$v_n(a) = C \int_0^{\omega} dx x^{-\frac{2}{3}} \cos(\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x), \quad (107)$$

$$w_n(a) = C \left[\int_0^{\omega} dx x^{-\frac{2}{3}} e^{\varepsilon x^{\frac{1}{3}} - x} + \int_0^{\omega} dx x^{-\frac{2}{3}} \sin(\varepsilon x^{\frac{1}{3}} + x) \right]. \quad (108)$$

En introduisant les séries (105) et (106) dans $(v_n \pm w_n)^2 = q_n \pm 2r_n$, on pourra sans difficulté se convaincre de l'exactitude de ces développements.* Pour l'usage de ce * NOTE 42. calcul, je mentionnerai ici les équations

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right).$$

Nous pouvons maintenant poursuivre le calcul interrompu dans le chapitre précédent, et considérer d'abord le cas où la sphère a un indice de réfraction plus petit que le milieu environnant. Nous supposons donc $N < 1$, d'où il suit que l'équation $a \sin \theta = a' \sin \theta'$ devient impossible pour $\sin \theta > N$.

Posons maintenant dans les équations (33) et (34) $v_n(a') = \sqrt{r_n(a')} e^{\mu_n(a')}$, tandis que $v_n(a)$ et $w_n(a)$ seront

comme auparavant exprimés par $q_n(a)$ et $\lambda_n(a)$, et comme q'_n peut être négligé en comparaison de q_n , de même r'_n pourra aussi l'être en comparaison de r_n . En déterminant

* NOTE 43. $q_n(a)$ par (67) et $r_n(a')$ par (89), on obtiendra*

$$\begin{aligned} 2k_n &= -1 + e^{2\lambda_n(a)i} \frac{q_n(a) - 2r_n(a')Ni}{q_n(a) + 2r_n(a')Ni} \\ &= -1 + e^{2\lambda_n(a)i} \frac{V(n + \frac{1}{2})^2 - a^2 - Va^2 - (n + \frac{1}{2})^2 N^2 i}{V(n + \frac{1}{2})^2 - a^2 + Va^2 - (n + \frac{1}{2})^2 N^2 i}, \end{aligned}$$

et si l'on pose

$$\frac{Va^2 - (n + \frac{1}{2})^2}{V(n + \frac{1}{2})^2 - a^2} N^2 = \operatorname{tg} \delta,$$

cette expression prendra la forme plus simple

$$2k_n = -1 + e^{2(\lambda_n(a) - \delta)i}.$$

On obtient de la même manière

$$2s_n = -1 + e^{2(\lambda_n(a) - \Delta)i}, \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{Va^2 - (n + \frac{1}{2})^2}{V(n + \frac{1}{2})^2 - a^2}.$$

Le cas où l'on a seulement $2k_n = -1$, $2s_n = -1$ a déjà été traité dans le chapitre précédent (p. 447). On y supposait d'une manière générale que les fonctions q_n et λ_n devaient, pour toutes les variables, pouvoir s'exprimer par les formules (67) et (68); mais il est à remarquer que, dans le cas particulier dont il s'agit, où k_n et s_n ne renferment pas les variables a et a' , nous avons seulement affaire aux fonctions $q_n(a)$ et $\lambda_n(a)$, et pour qu'elles puissent être exprimées par (67) et (68), il suffit qu'on ait $\nu + \frac{1}{2} = a \sin \theta < a$. Les résultats trouvés sont donc valables jusqu'à une distance a de l'axe principal, et, comme on se le rappelle, le mouvement de la lumière ainsi représenté en dehors de la

sphère comprenait la lumière incidente dans l'espace du côté négatif du plan des yz et une obscurité complète sur le côté positif du même plan.

Si l'on suppose ensuite que

$$2k_n = e^{2(\lambda_n(a) - \delta)i}, \quad 2s_n = e^{2(\lambda_n(a) - \Delta)i},$$

et si l'on pose comme à l'ordinaire $n = \nu + z$, on remarquera que le développement, suivant les puissances de z , de $\lambda_{\nu+z}(a)$ donne aux différentes puissances de z des coefficients d'un ordre plus élevé que celui qu'on obtient par le développement correspondant de δ et de Δ *. En * NOTE 44. posant $\nu + \frac{1}{2} = a \sin \theta$, δ et Δ pourront donc être exprimés par les valeurs constantes

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos \theta}{V \sin^2 \theta - N^2} N^2, \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{\cos \theta}{V \sin^2 \theta - N^2}.$$

Les expressions de k_n et de s_n correspondent maintenant entièrement au cas déjà traité (p. 457), où nous avons déterminé la réflexion par la surface extérieure de la sphère. La différence consiste seulement en ceci que les facteurs b_ν et c_ν sont devenus égaux à -1 , et que la phase est diminuée dans K de 2δ et dans S de 2Δ , et les résultats déjà trouvés pourront donc avec ces changements encore servir ici.

Les cas limite $\sin \theta = N$ ne constitue pas une exception spéciale, puisque δ et Δ , lorsque θ décroît jusqu'à cette limite, deviennent égaux à $\frac{\pi}{2}$ et les facteurs $e^{-2\delta i}$ et $e^{-2\Delta i}$ à -1 , et que par là K et S prennent les mêmes valeurs que celles qui résulteraient des formules précédentes si θ croissait jusqu'à la même limite.

Les coefficients k'_n et s'_n sont déterminés par

$$k'_n = e^{\lambda_n(a)i - \mu_n(a')i} \frac{2N\sqrt{q_n(a)r_n(a')}}{q_n(a) + 2r_n(a')N^2i},$$

$$s'_n = e^{\lambda_n(a)i - \mu_n(a')i} \frac{2N\sqrt{q_n(a)r_n(a')}}{Nq_n(a) + 2r_n(a')i}.$$

Comme, pour un point intérieur, $n > a'$ doit en même temps aussi correspondre à $n > a'$, il faut dans les séries K' et S' (79) poser $\sqrt{q_n(a')} \sin \lambda_n(a') = \sqrt{r_n(a')} e^{\mu_n(a')}$. On voit donc que ces séries renfermeront le facteur $e^{\mu_n(a') - \mu_n(a')}$, qui, si a' et a' ne sont pas très près d'être égaux, sera une quantité extrêmement petite. Cela résulte de l'expression donnée dans (93) pour μ_n , qui, si la variable n'est pas très voisine de n , est une quantité négative très grande et d'autant plus grande que la variable est plus petite. Le mouvement de la lumière en dedans de la partie de la sphère qui produit une réflexion totale n'est sensible que dans une couche mince immédiatement au-dessous de la surface de la sphère.

Si l'on pose $a' = a' - Nh$, h étant supposé très petit, on aura

$$\mu_n(a') - \mu_n(a') = \frac{Nh}{2r_n(a')} = \frac{h}{a} \sqrt{(n + \frac{1}{2})^2 - a'^2}.$$

On trouvera ensuite comme à l'ordinaire

$$K' = \frac{2N \cos \phi}{a\sqrt{1 - N^2} \operatorname{tg} \theta \sqrt{V \sin^2 \theta - N^2} \cos^2 \theta} e^{(kt + a \cos \theta + \frac{\pi}{2} - \delta)i - h\sqrt{V \sin^2 \theta - N^2}},$$

$$S' = -i \frac{2 \sin \phi}{a\sqrt{1 - N^2} \operatorname{tg} \theta} e^{(kt + a \cos \theta + \frac{\pi}{2} - \delta)i - h\sqrt{V \sin^2 \theta - N^2}},$$

et $\phi + \theta = \pi$. Dans la détermination des composantes $\bar{\xi}'$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\zeta}'$, il faut revenir aux équations (18), et comme K' et S' renferment originairement le facteur $e^{\mu_n(a')}$, on

aura, en négligeant les termes d'un ordre inférieur,

$$\frac{\partial K'}{\partial a'} = \frac{\partial \mu_n(a')}{\partial a'} K' = \frac{V(n + \frac{1}{2})^2 - a'^2}{a'} K' = \frac{V \sin^2 \theta - N^2}{N} K'.$$

On obtient en même temps

$$\frac{\partial K'}{\partial \phi'} = (n + \frac{1}{2}) K' i = a \sin \theta K' i,$$

et les mêmes équations restent applicables en y remplaçant K' par S' . Les équations (18) donnent ainsi dans ce cas

$$\bar{\xi}' = \frac{\sin^2 \theta}{N} a K', \quad \bar{\eta}' = i \frac{\sin \theta \sqrt{V \sin^2 \theta - N^2}}{N} a K', \quad \bar{\zeta}' = -i \sin \theta a S',$$

où l'on peut substituer les valeurs trouvées pour K' et pour S' .

On voit que les résultats de ce calcul de la réflexion totale s'accordent, tant pour les points extérieurs que pour les points intérieurs, avec ce qui est connu par la théorie de la réflexion totale par des surfaces planes, et le calcul ne conduit donc pas au delà de ce qui peut aussi être trouvé par la voie élémentaire.

Il reste seulement encore à continuer les sommations des séries K et S (79) à partir de la limite de n à laquelle les équations (67) et (68) cessent d'être valables pour la variable a^* . Dans tous les cas, la valeur de k_n * NOTE 45. donnée dans (33) pourra être transformée en

$$2k_n = -1 + A e^{2\lambda_n(a)i}, \quad A = \frac{q_n(a)(1 + r'_n(a')) - N(i + \frac{1}{2} q'_n(a)) 2r_n(a')}{q_n(a)(1 + r'_n(a)) - N(-i + \frac{1}{2} q'_n(a)) 2r_n(a')}.$$

La fraction désignée par A , lorsque n dépasse la limite dont il s'agit, devient égale à 1, N étant supposé différent de 1. Nous n'examinerons pas le cas où $N - 1$

est assez petit pour que la différence doive être considérée comme une grandeur d'un ordre plus petit que l'unité.

L'équation $A = 1$ aura en effet toujours lieu, si $q'_n(a)$ est d'un ordre plus élevé que l'unité, ce qui, suivant (99), est le cas lorsque $n - a$ est positif et d'un ordre

* NOTE 46. plus élevé que celui de $a^{\frac{1}{2}}$. En outre, n est si grand* dans la somme considérée que $q_n(a)$ est d'un ordre supérieur à l'unité, tandis que $r_n(a')$ et $r'_n(a')$, lorsque la différence $n - a$, tant positive que négative, est d'un ordre moins élevé que celui de a , ne peuvent être d'un ordre supérieur à l'unité. Cela résulte de ce qui a été dit plus haut (p. 478), car on a $n - a' = n - a - (N - 1)a$, où le dernier terme ne peut être d'un ordre plus petit que celui de a . Il en résulte donc que, dans le cas considéré, on doit toujours avoir $A = 1$, et comme les mêmes considérations peuvent s'appliquer à la valeur de s_n donnée dans (33), on aura

$$2k_n = -1 + e^{2\lambda_n(a)i}, \quad 2s_n = -1 + e^{2\lambda_n(a)i}.$$

Ces deux coefficients, pour $n > a$, n allant en croissant,

* NOTE 47. convergent rapidement vers 0*.

En nous référant à ce qui précède pour le cas de $2k_n = -1$, $2s_n = -1$, nous aurons à considérer la série

$$Q = \frac{aK}{\cos \phi} = \frac{iaS}{\sin \phi} \\ = - \sum_{n_2}^{n_3} \sqrt{\frac{2q_n(a)}{\pi n \sin \phi}} \sin \left((n + \frac{1}{2})\phi - \frac{\pi}{4} \right) e^{(kt - \frac{n\pi}{2} + 2\lambda_n(a) - \lambda_n(a))i},$$

où n_3 est la limite supérieure de n , en deçà de laquelle $q_n(a)$ et $\lambda_n(a)$ se laissent déterminer par (67) et (68).

L'exposant dans cette somme est

$$\left(kt - \frac{n\pi}{2} + 2\lambda_n(a) - \lambda_n(a) \pm \left((n + \frac{1}{2})\phi - \frac{\pi}{4} \right) \right) i,$$

et en y posant $n = \nu + z$ et $\nu + \frac{1}{2} = a \sin \vartheta$, le coefficient de z en négligeant les grandeurs d'un ordre inférieur à l'unité, sera égal à $-\vartheta \pm \varphi$. Par conséquent, s'il doit être nul ou très petit, on devra prendre le signe supérieur et $\varphi - \vartheta$ sera nul ou très petit*. Il en résulte * NOTE 48. que les composantes du mouvement vibratoire pourront, d'après (80), être déterminées par

$$\bar{\xi}_e = \sin^2 \varphi \cos \phi Q,$$

$$\bar{\eta}_e = \sin \varphi \cos \varphi \cos \phi Q, \quad \bar{\zeta}_e = -\sin \varphi \sin \phi Q,$$

d'où l'on obtient pour les composantes par rapport aux axes fixes

$$\xi_e = 0, \quad \eta_e = \sin \varphi Q, \quad \zeta_e = 0.$$

Comme $\varphi - \vartheta$ est très petit et que, par suite, on peut ailleurs que dans l'exposant poser $q_n(a) = \frac{1}{\cos \vartheta} = \frac{1}{\cos \varphi}$ et $n = a \sin \vartheta = a \sin \varphi$, la quantité $\sin \varphi Q$ se laisse réduire à

$$\sin \varphi Q = \eta_e = \frac{i}{\sqrt{2\pi a \cos \varphi}} \sum_{n_2}^{n_3} e^{F_n i},$$

$$F_n = kt - \frac{n\pi}{2} + 2\lambda_n(a) - \lambda_n(a) + (n + \frac{1}{2})\phi - \frac{\pi}{4},$$

expressions qui représentent sous une forme simple le phénomène complexe qui comprend la diffraction de rayons parallèles par une sphère réfléchissante.

Si nous considérons d'abord la partie de la somme où $n > a$, on voit que $\lambda_n(a)$, pour des valeurs croissantes

de n , décroît de $\frac{\pi}{6}$ jusqu'à 0. On en obtient une détermination plus exacte par les équations

$$e^{2\lambda_n(a)i} = \frac{1 + \operatorname{tg} \lambda_n(a)i}{1 - \operatorname{tg} \lambda_n(a)i} = \frac{1 + e^{2\mu_n(a)i}}{1 - e^{2\mu_n(a)i}} = 1 + 2 \sum_0^{\infty} e^{2m\mu_n(a)i} m$$

où $\mu_n(a)$, pour $n = a$, a pour valeur $-\frac{1}{4} \operatorname{crg} 3$ et décroît rapidement pour des valeurs croissantes de n .

Si donc on pose d'abord dans la somme considérée $e^{2\lambda_n(a)i} = 1$, puis dans l'exposant, comme à l'ordinaire, $n = \nu + z$, $\nu + \frac{1}{2} = a \sin \vartheta$, le coefficient de zi , dans l'exposant développé suivant les puissances de z , deviendra $\varphi - \vartheta$. La somme, pour $\varphi = \vartheta$, sera ainsi remplacée par l'intégrale

$$\int_{a - a \sin \vartheta}^{a - a \sin \vartheta} dz e^{(kt - a \cos \varphi - \frac{\pi}{4} - \frac{z^2}{2a \cos \varphi})i} = -i \sqrt{2\pi a \cos \varphi} \eta_e$$

qui, par la substitution

$$z = \left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sqrt{2a \cos \varphi}, \quad \frac{\varepsilon}{2} = \frac{a \sin \varphi - a}{\sqrt{2a \cos \varphi}}$$

donne

$$\eta_e = \frac{i}{\sqrt{\pi}} e^{(kt - a \cos \varphi - \frac{\pi + \varepsilon^2}{4})i} \int_0^{\infty} dx e^{(\varepsilon x - x^2)i}$$

intégrale qui correspond à l'intégrale (57) lorsqu'on change le signe de i . Il résulte du calcul de cette dernière intégrale que pour $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire quand le point est situé en dehors du bord de l'ombre géométrique de la sphère ($a \sin \varphi > a$), l'intégrale est une fonction périodique. En dedans du bord de l'ombre ($\varepsilon < 0$), elle est au contraire apériodique. Au bord même de l'ombre ($\varepsilon = 0$), on trouve

$$\eta_e = \frac{1}{2} e^{(kt - a \cos \varphi)i}$$

Le résultat est, sous tous les rapports, le même que celui qu'on obtient pour la diffraction de la lumière par un disque plan circulaire placé, au lieu de la sphère, dans le grand cercle auquel les rayons incidents sont tangents.

La seconde partie de la somme considérée plus haut est

$$2 \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_a^{n_s} e^{(kt - \lambda_n(a) + (n + \frac{1}{2})\varphi - (2n - 2m + 1)\frac{\pi}{4})i + 2m\mu_n(a)}$$

Si l'on y pose $n = \nu + z$, $\nu + \frac{1}{2} = a = a \sin \vartheta$ et qu'on se serve pour $\mu_n(a)$ du développement (104), le coefficient de z dans l'exposant deviendra, par le développement suivant les puissances de z , $(\varphi - \vartheta)i - \frac{m}{r}$, où $r = r_1(\nu + \frac{1}{2})$ est déterminé par (97) et est de l'ordre de $a^{\frac{1}{2}}$.

Si $\varphi - \vartheta$ est d'un ordre plus élevé que $a^{-\frac{1}{2}}$, la somme considérée, en ne prenant que les grandeurs de l'ordre le plus élevé, pourra être exprimée par

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{\varphi - \vartheta} e^{(kt - a \cos \vartheta + a(\varphi - \vartheta) + (2m + 1)\frac{\pi}{4})i - \frac{m}{2} \log 3} \quad * \text{ NOTE 49.}$$

qui est d'un ordre moins élevé que $a^{\frac{1}{2}}$.

Par contre, si le point considéré est assez voisin du bord géométrique de l'ombre de la sphère pour que $\varphi - \vartheta$ soit du même ordre ou d'un ordre moins élevé que $a^{-\frac{1}{2}}$, on aura à tenir compte de tous les termes du développement de l'exposant suivant les puissances de z ; mais par la substitution $z = rx$, ils deviendront tous de l'ordre de a^0 et l'intégrale entière sera du même ordre que r , par conséquent de l'ordre de $a^{\frac{1}{2}}$. L'amplitude correspondante pourra être exprimée par

* NOTE 50.

$$C \frac{a^{\frac{1}{2}}}{V a \cos \varphi},$$

où C est une constante numérique. Un calcul plus exact de cette constante ne présente guère d'intérêt, car on voit facilement que cette partie du mouvement de la lumière ne peut être que très minime et à peine observable, puisqu'elle se confond avec le reste de la lumière diffractée. La formule montre que l'intensité de cette lumière est proportionnelle à la puissance $\frac{2}{3}$ du rayon de la sphère et à la puissance $\frac{1}{3}$ de la longueur d'onde, et inversement proportionnelle à la distance du point considéré au grand cercle auquel les rayons incidents sont tangents, supposé toutefois que cette dernière distance elle-même ne devienne pas très petite.

Enfin, l'amplitude vibratoire correspondant à $n < a$ est aussi déterminée par

$$\eta_e = \frac{i}{V 2 \pi a \cos \varphi} \sum_1^a e^{F n^2},$$

sommation dans laquelle $\lambda_n(a)$, pour des valeurs croissantes de n , décroît d'une grande valeur indéterminée jusqu'à $\frac{\pi}{6}$. En posant $n = \nu - z$, $\nu + \frac{1}{2} a = a \sin \vartheta$, on obtient

$$\eta_e = \frac{i}{V 2 \pi a \cos \varphi} \int_0^{\omega} dz e^{(k t - a \cos \vartheta + a(\varphi - \vartheta) + 2 \lambda_{\nu-z}(a) - \frac{\pi}{4} - (\varphi - \vartheta) z) i}$$

où $\lambda_{\nu-z}(a)$ peut être développé suivant (103). On voit maintenant que ce cas correspond entièrement à celui qui a été traité plus haut, et que le résultat peut être présenté sous la même forme. Cette partie du mouvement de la lumière correspond à la diffraction des rayons totalement réfléchis sous une incidence rasante. L'in-

tensité de ces derniers rayons décroît à mesure que l'angle d'incidence croît; cependant, à cause de la diffraction, cette intensité n'est pas nulle au bord géométrique de l'ombre, mais devient une grandeur de la même espèce que l'intensité des rayons diffractés considérés plus haut, après quoi elle décroît rapidement en dedans du bord de l'ombre.

Les sommations par rapport à n n'ont encore été faites que jusqu'à la limite supérieure $n = n_s$; mais, comme nous l'avons déjà fait observer, les coefficients k_n et s_n , pour $n > a$ et pour des valeurs croissantes de n , convergeront rapidement vers 0. Cette partie des sommes sera donc en général une quantité extrêmement petite.

7. Quantité de lumière émise. a très petit. Système de petites sphères.

Toute la lumière émanée de la sphère éclairée est supposée recueillie sur le côté intérieur d'une surface sphérique concentrique placée à une distance infinie de la sphère. En désignant par L la quantité totale de lumière recueillie, par r le rayon infini de la sphère et par I l'intensité de la lumière à la distance r , mesurée par le carré de l'amplitude, L pourra être défini et déterminé par

$$L = r^2 \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi I. \quad (109)$$

D'après les équations (17) et (31), les composantes du mouvement vibratoire, pour $a = \frac{2\pi r}{\lambda}$ et r infiniment grand, peuvent être exprimées par

$$\bar{\xi}_e = 0, \quad \bar{\eta}_e = -\frac{i \cos \phi}{a} e^{i(k-a)t} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(k_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} + s_n \frac{dP_n}{\sin \varphi d\varphi} \right),$$

$$\bar{\xi}_e = \frac{i \sin \phi}{a} e^{i(k-a)t} \sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\bar{k}_n \frac{dP_n}{\sin \varphi d\varphi} + \bar{s}_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \right),$$

où k_n et s_n sont des grandeurs complexes, dont nous désignerons le module par \bar{k}_n et \bar{s}_n . Si maintenant on détermine I par la somme des carrés des amplitudes de ces composantes, l'équation (109), après qu'on aura fait l'intégration par rapport à ϕ , donnera

$$L = \frac{\lambda^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \left[\left(\sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\bar{k}_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} + \bar{s}_n \frac{dP_n}{\sin \varphi d\varphi} \right) \right)^2 + \left(\sum_1^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\bar{k}_n \frac{dP_n}{\sin \varphi d\varphi} + \bar{s}_n \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \right) \right)^2 \right].$$

Chacun de ces carrés peut aussi être exprimé comme un produit de deux sommes avec les variables n et m , et en remarquant que l'on a

$$\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \left(\frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \frac{d^2 P_m}{d\varphi^2} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{dP_n}{d\varphi} \frac{dP_m}{d\varphi} \right) = \begin{cases} 0 & \text{quand } m \geq n \\ \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1} & \text{quand } m = n \end{cases}$$

* NOTE 51. $\int_0^{\pi} d\varphi \left(\frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \frac{dP_m}{d\varphi} + \frac{dP_n}{d\varphi} \frac{d^2 P_m}{d\varphi^2} \right) = 0^*$,

on trouvera que la quantité de lumière L est déterminée par

$$L = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_1^{\infty} (2n+1) (\bar{k}_n^2 + \bar{s}_n^2). \quad (110)$$

Les expressions générales (33) des coefficients k_n et s_n peuvent aussi être mises sous la forme

$$k_n = -\frac{1}{1+p_n i}, \quad p_n = \frac{w_n(\alpha) v_n'(\alpha') - N w_n'(\alpha) v_n(\alpha')}{v_n(\alpha) v_n'(\alpha') - N v_n'(\alpha) v_n(\alpha')}, \quad (111)$$

$$s_n = -\frac{1}{1+q_n i}, \quad q_n = \frac{N w_n(\alpha) v_n'(\alpha') - w_n'(\alpha) v_n(\alpha')}{N v_n(\alpha) v_n'(\alpha') - v_n'(\alpha) v_n(\alpha')}. \quad (112)$$

Le module de ces coefficients est donc moindre que 1, excepté dans les cas où l'on a $p_n = 0$, ou $q_n = 0$, valeurs auxquelles correspondent respectivement $k_n = -1$ et $s_n = -1$.

Nous déterminerons maintenant le mouvement de la lumière dans le cas où le diamètre de la sphère éclairée est très petit en comparaison de la longueur d'onde de la lumière incidente, de sorte que a devra être considéré comme un nombre assez petit pour que, dans les développements suivant les puissances de a , on ne doive prendre en général que le terme qui renferme la plus petite puissance de a . Par contre, nous ne ferons provisoirement, relativement à a' , aucune supposition restrictive*.

* NOTE 52.

D'après les développements en série (22) et (24), on aura, en ne prenant que le premier terme des séries,

$$v_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{1 \cdot 3 \dots 2n+1}, \quad v_n'(\alpha) = \frac{(n+1)\alpha^n}{1 \cdot 3 \dots 2n+1},$$

$$w_n(\alpha) = \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{\alpha^n}, \quad w_n'(\alpha) = -n \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{\alpha^{n+1}}.$$

En substituant ces valeurs dans (111) et (112), on verra que k_n et s_n deviennent en général des grandeurs très petites de l'ordre de α^{2n+1} . On trouvera en effet

$$p_n = \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1)}{\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{\alpha' v_n'(\alpha') + N^2 n v_n(\alpha')}{\alpha' v_n'(\alpha') - N^2 (n+1) v_n(\alpha')},$$

$$q_n = \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1)}{\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{\alpha' v_n'(\alpha') + n v_n(\alpha')}{\alpha' v_n'(\alpha') - (n+1) v_n(\alpha')};$$

dans la dernière expression, on peut aussi poser

$$\begin{aligned} a'v'_n(a') + nv_n(a') &= a'v_{n-1}(a'), \\ a'v'_n(a') - (n+1)v_n(a') &= -a'v_{n+1}(a'). \end{aligned}$$

Par conséquent, abstraction faite des cas particuliers, les développements (31) de K et de S se réduiront au premier terme, correspondant à $n = 1$, terme où entrent

$$k_1 = i \frac{a^3}{3} \frac{a'v'_1(a') - 2N^2v_1(a')}{a'v'_1(a') + N^2v_1(a')}, \quad s_1 = -i \frac{a^3}{3} \frac{v_2(a')}{v_0(a')};$$

après quoi les composantes du mouvement vibratoire $\bar{\xi}_e$, $\bar{\eta}_e$, $\bar{\zeta}_e$ se laissent facilement déterminer à l'aide des équations (17).

Si maintenant a' est, de même que a , une grandeur très petite, k_1 pourra se réduire à la forme

$$k_1 = -i \frac{2a^3}{3} \cdot \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2},$$

tandis que, pour a' très petit ou si a' est une racine de l'équation $v_2(a') = 0$, on obtient $s_1 = 0$.

Dans ce dernier cas, $\bar{\eta}_e$, d'après les équations (17), sera toujours proportionnel à $\cos \varphi$, d'où il suit que les vibrations de la lumière réfléchie perpendiculairement aux rayons incidents seront dirigées perpendiculairement au plan d'incidence, et que, par conséquent, la lumière sera entièrement polarisée dans ce plan. Il va sans dire que cela aura lieu aussi si la lumière incidente n'est pas polarisée.

Les données restant les mêmes, la même loi doit également être applicable si, au lieu d'une sphère isolée, nous nous représentons un assemblage de sphères semblables, séparées les unes des autres et disposées sans aucun ordre. Si nous posons en outre, dans l'expression de k_1 , $a = \frac{2\pi R}{\lambda}$, R étant le rayon de la sphère, on voit

que le mouvement de la lumière en un point arbitraire hors de la sphère, abstraction faite de la lumière incidente et des coordonnées du point, dépend seulement de la grandeur $\frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} R^3$. Maintenant, dans le système de sphères ci-dessus mentionné, concevons que, la situation de leurs centres restant la même, leurs rayons croissent jusqu'à R_1 , qui cependant doit toujours être très petit en comparaison d'une longueur d'onde, tandis que leur indice de réfraction passe de N à N_1 ; si ce changement s'opère de manière qu'on ait toujours

$$\frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} R^3 = \frac{N_1^2 - 1}{N_1^2 + 2} R_1^3,$$

le mouvement de la lumière, en dehors des sphères et partout en dehors du système, ne sera pas influencé par ce changement. Si R_1 devient égal à la plus petite demi-distance moyenne des centres des sphères, le système correspondra à très peu près à un milieu homogène avec l'indice de réfraction N_1 . De là on peut encore conclure que si les sphères, dans le système, restent les mêmes tandis que la densité d_1 de ce dernier varie, l'indice de réfraction N_1 du système variera de manière que $\frac{N_1^2 - 1}{N_1^2 + 2} \frac{1}{d_1}$ restera constant (cf. „Théorie de la dispersion“).

La quantité totale de lumière émise par une sphère isolée sera, d'après (110), déterminée par

$$L = \frac{2\lambda^2 a^6}{3\pi} \left(\frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right)^2,$$

et A désignant le nombre de sphères dans l'unité de volume, AL sera la quantité totale de lumière rayonnée par chaque unité de volume du système*. Cette grandeur est * NOTE 53.

le coefficient d'absorption du système, et si on la désigne par h , α étant en même temps exprimé par $\frac{2\pi k}{\lambda}$, on aura

$$h = AL = A \frac{128\pi^3 k^6}{3\lambda^4} \left(\frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right)^2, \quad A = \frac{3}{4\pi R_1^3}.$$

Il en résulte que le coefficient d'absorption est inversement proportionnel à la quatrième puissance de la longueur d'onde (loi de Rayleigh*). Réciproquement, le coefficient d'absorption h du système et son indice de réfraction N_1 étant donnés, on pourra, avec nos données, déduire le nombre de sphères par unité de volume et une limite inférieure de leur grandeur, car on tire des équations précédentes

$$A = \frac{24\pi^3}{h\lambda^4} \left(\frac{N_1^2 - 1}{N_1^2 + 2} \right)^2, \quad R^3 = \frac{h\lambda^4}{32\pi^4} \frac{(N_1^2 + 2)(N_1^2 + 2)}{(N_1^2 - 1)(N_1^2 - 1)} > \frac{h\lambda^2}{32\pi^4} \frac{N_1^2 + 2}{N_1^2 - 1}.$$

Comme exemple, nous prendrons l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption de l'air atmosphérique à la pression ordinaire, à savoir $N_1 = 1,00029$ et $h\lambda^4 = 0,0017$, $10^{-6\text{mm}}$ étant pris pour unité de longueur. Avec ce dernier coefficient, 11,3 % de lumière avec la longueur d'onde 580 et deux fois plus avec $\lambda = 480$ seront absorbés sur une étendue de 8 kilomètres.

Ces valeurs, étant substituées dans les équations précédentes, donnent

$$A = 0,0163, \quad R = 0,141 \left(\frac{N_1^2 + 2}{N_1^2 - 1} \right)^{\frac{1}{3}} > 0,141,$$

c'est-à-dire par millimètre cube un nombre de $0,0163 \cdot 10^{18}$ sphères avec un rayon d'au moins $0,141 \cdot 10^{-6\text{mm}}$. A ces

* J. W. Strutt: Phil. Mag. 41, février, avril, juin 1871.

valeurs correspond $\alpha = 0,00153$ pour $\lambda = 580$ et $\alpha = 0,00185$ pour $\lambda = 480$.

Très différent de ce mouvement de la lumière est celui qui se produit dans les cas particuliers où l'on a $p_n = 0$ ou $q_n = 0$, lesquels se présentent pour toute une série de longueurs d'onde. A ces cas correspondent, d'après les équations (111) et (112),

$$w_n(a)v'_n(a) - Nw'_n(a)v_n(a) = 0, \\ Nw_n(a)v'_n(a) - w'_n(a)v_n(a) = 0.$$

La première de ces équations correspond approximativement à $v_n(a) = 0$, la seconde à $v_{n-1}(a) = 0^*$. En posant * NOTE 54. pour plus d'exactitude dans la première équation $a' = \beta + \varepsilon$, β étant une racine de l'équation $v_n(\beta) = 0$, on obtient par un développement suivant les puissances de ε et en négligeant les termes qui renferment une puissance de ε plus grande que la première,

$$\varepsilon = \frac{w_n(a)}{Nw'_n(a)} = -\frac{\alpha}{Nn}.$$

Si l'équation donnée est $q_{n+1} = 0$, à cette équation correspondra, si l'on prend les deux premiers termes du développement de $w_{n+1}(a)$ et $w'_{n+1}(a)$,

$$Na \left(1 + \frac{\alpha^2}{2(2n+1)} \right) v'_{n+1}(a') + \left(n+1 + \frac{(n-1)\alpha^2}{2(2n+1)} \right) v_{n+1}(a) = 0,$$

où l'on a $v_{n+1}(a) = -v'_n(a) + \frac{n+1}{a'} v_n(a)$

et

$$v'_{n+1}(a) = -\left(\frac{(n+1)^2}{a'^2} - 1 \right) v_n(a) + \frac{n+1}{a'} v'_n(a).$$

A l'aide de ces équations, on trouve avec le degré d'approximation voulu

$$(2n+1)a'v_n(a') + \alpha^2 v'_n(a) = 0.$$

Si maintenant on pose $a' = \beta + \varepsilon'$, $v_n(\beta)$ étant, comme auparavant, égal à 0, on obtient

$$\varepsilon' = -\frac{\alpha^2}{(2n+1)\alpha} = -\frac{\alpha}{N(2n+1)}.$$

Les racines de $p_n = 0$ et de $q_{n+1} = 0$ sont donc très près d'être égales, mais sans l'être exactement, et la différence entre deux racines correspondantes est

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{\alpha(n+1)}{Nn(2n+1)} \quad (n > 0).$$

En désignant les variations correspondantes de la longueur d'onde par δ et δ' , on a

$$\frac{\varepsilon}{\beta} = -\frac{\delta}{\lambda}, \quad \frac{\varepsilon'}{\beta} = -\frac{\delta'}{\lambda}$$

et

$$\delta - \delta' = \frac{\lambda\alpha(n+1)}{\beta Nn(2n+1)} = \frac{\pi^2}{\beta^2} \cdot \frac{4R^2}{\lambda} \cdot \frac{n+1}{n(2n+1)}.$$

Le tableau suivant donne les cinq plus grandes valeurs de $\frac{\pi}{\beta}$ pour $n = 0, 1, 2, 3$, β étant une racine de l'équation $v_n(\beta) = 0$:

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1	0,6992	0,5451	0,4496 ...
0,5000	0,4067	0,3454	0,3016 ...
0,3333	0,2881	0,2549	0,2293 ...
0,2500	0,2233	0,2025	0,1856 ...
0,2000	0,1823	0,1681	0,1561 ...
⋮	⋮	⋮	⋮

On voit maintenant que la plus grande différence $\delta - \delta'$ dans la longueur d'onde correspond à $\frac{\pi}{\beta} = 0,6992$ et à $n = 1$. En prenant pour exemple $R = 0,141$ et

$\lambda = 580$, on trouve $\delta - \delta' = 0,000045$, nombre 13000 fois plus petit que la différence (0,6) entre les longueurs d'onde des deux raies D_1 et D_2 du spectre solaire.

Dans un système de sphères, il se produit, dans les cas particuliers considérés ici, des raies d'absorption lorsque la lumière blanche transmise est décomposée en un spectre. En effet, tandis que la quantité de lumière rayonnée de chaque sphère est en général, comme nous l'avons vu, une grandeur très petite proportionnelle à R^3 , elle devient, pour $p_n = 0$ ou $q_n = 0$, égale à $\frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi}$, c'est-à-dire aussi grande que la quantité de lumière incidente qui, sans déviation, tomberait sur une sphère dont le rayon serait $\frac{\lambda\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\pi}$. Comme, dans notre système, les distances moyennes des sphères voisines sont supposées beaucoup plus petites, on voit que le système peut être regardé comme à peu près impénétrable à cette espèce de rayons. On remarquera en même temps que les raies d'absorption correspondant à $q_1 = 0$, c'est-à-dire à $v_0(\beta) = 0$, sont simples et toutes les autres doubles.

Si l'on a déterminé dans un système une série de longueurs d'onde de raies d'absorption, elles pourront être rapportées aux inverses des racines de l'équation $v_n(\beta) = 0$, où $n = 0, 1, 2, \dots$, en les multipliant par un même facteur constant. Ce facteur étant égal à $\frac{N}{2\pi R}$, il sera donc possible, à l'aide de ce facteur, de l'indice de réfraction et du coefficient d'absorption du système, de déterminer toutes les constantes de ce système, à savoir le nombre de sphères par unité de volume, leur grandeur et leur indice de réfraction.

On pourra aussi dans ce but employer des mesures de la largeur des raies dont le calcul peut se faire comme il suit.

Si la longueur d'onde λ correspond à $p_n = 0$, la valeur de p_n , pour une longueur d'onde voisine $\lambda + \delta$,

* NOTE 55. sera déterminée par*

$$p_n = - \left[\frac{dp_n}{d\alpha} + \frac{dp_n}{d\alpha'} N \right] \cdot \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2}{\alpha^{2n+1}} \cdot \frac{N^2 - 1}{N^2} (nN^2 + n(n+1)) \frac{\delta}{\lambda}.$$

De même, si λ correspond à $q_n = 0$, la valeur de q_n , pour une longueur d'onde $\lambda + \delta$, sera déterminée par

$$q_n = \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2}{\alpha^{2n-1}} (N^2 - 1) \frac{\delta}{\lambda}.$$

Bien que δ soit considérée comme une petite grandeur, elle pourra cependant toujours être supposée assez grande pour que p_n et q_n soient très grands par rapport à l'unité, de sorte que k_n et s_n pourront être déterminés par

$$k_n = \frac{i}{p_n}, \quad s_n = \frac{i}{q_n}.$$

Pour un système de sphères, les coefficients d'absorption correspondants seront exprimés par

$$\frac{A}{p_n^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi} \quad \text{et} \quad \frac{A}{q_n^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi}.$$

Nous pouvons maintenant, dans le spectre de la lumière transmise, considérer les deux limites d'une raie d'absorption comme les points où l'intensité de la lumière est réduite à une fraction constante e^{-c} , et la largeur de la raie pourra alors être déterminée par la différence 2δ entre les longueurs d'onde en ces deux

points. En désignant par x la distance parcourue par un rayon du système considéré, on aura

$$c = \frac{Ax}{p_n^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi} \quad \text{et} \quad c = \frac{Ax}{q_n^2} \cdot \frac{\lambda^2(2n+1)}{2\pi}.$$

En substituant dans ces expressions les valeurs de p_n et de q_n trouvées plus haut, on voit que la largeur des raies est toujours proportionnelle à la racine carrée du chemin parcouru, comme aussi à la racine carrée du nombre de sphères par unité de volume.

La raie la plus large correspond à

$$a' = \pi, \quad q_1 = \frac{a'^2 - a^2}{a^3} \cdot \frac{\delta}{\lambda},$$

ce qui donne

$$2\delta = \frac{8R^3}{\lambda} \sqrt{\frac{6\pi Ax}{c}}.$$

Pour $A = 0,0163$, $R = 0,141$, $\lambda = 580$, $x = 10^4$ ou 10 mètres et $c = 0,693$, correspondant à une absorption de 50 % aux bords de la raie, on trouve

$$2\delta = 2,57,$$

valeur qui correspond à une largeur 4,3 fois plus grande que la distance entre les deux raies D_1 et D_2 du spectre solaire. Il n'est pas sans intérêt de remarquer que 2δ peut aussi être calculé directement au moyen du coefficient général d'absorption h , sans qu'il soit besoin de connaître les autres constantes du système, N pouvant, dans l'expression de h , être considéré comme un très grand nombre.

Les raies d'absorption peuvent ainsi être très larges et présenter plutôt le caractère de bandes d'absorption, lorsque a' est une des plus petites racines de l'équation

$v_0(a') = 0$. Mais, si a' est une des racines des équations $v_1(a')$, $v_2(a') = 0$, les raies, avec les constantes numériques prises ici pour exemples, seront, même dans les cas les plus favorables, réduites à des lignes d'une largeur à peine mesurable, ce qui, bien entendu, n'empêche pas qu'elles ne puissent être visibles.

Mon intention, en calculant le mouvement de la lumière dans un système de petites sphères, n'a pas été d'en donner une détermination exacte, ce qui eût exigé un plus grand appareil mathématique. J'ai seulement cherché à mettre en évidence ce que présente de particulier ce mouvement de la lumière, qui, pour une sphère isolée, se laisse déterminer exactement et, par là, devient aussi calculable dans ses parties essentielles pour un assemblage de sphères, le but de ce travail ayant été, en partie, de montrer la possibilité d'arriver, par les propriétés optiques du système, à la connaissance des éléments qui, par leur petitesse même, échappent à l'observation directe, en partie d'appeler l'attention sur la frappante analogie qui se manifeste entre les propriétés optiques du système et celles des gaz.

NOTES.

NOTE 1. La traduction de ce mémoire a été faite par feu M. Frisch et approuvée par Lorenz lui-même.

NOTE 2. Les dérivées partielles par rapport aux autres coordonnées polaires sont au contraire toujours finies.

NOTE 3. φ désigne l'angle que fait r avec l'axe des x , ψ l'angle que fait le plan qui passe par r et x avec le plan des xy .

NOTE 4. On a

$$r\bar{\xi} = x\xi + y\eta + z\zeta,$$

$$\Delta_2(r\bar{\xi}) = x\Delta_2\xi + y\Delta_2\eta + z\Delta_2\zeta + 2\theta.$$

NOTE 5. Le symbole $\Delta_2 u$ peut être exprimé en coordonnées polaires par

$$\Delta_2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2},$$

et comme les dérivées par rapport à φ et ψ sont partout finies, l'expression

$$\frac{\partial^2(r^2\bar{\xi})}{\partial r^2} - \frac{\partial(r^2\theta)}{\partial r}$$

sera par conséquent aussi finie.

De la même manière on reconnaît que les expressions suivantes sont partout finies.

NOTE 6. l est défini comme le coefficient de x dans l'expression $e^{(l-t)x}$; mais Lorenz se sert en général de la lettre l pour désigner la quantité $\frac{2\pi}{\lambda}$, où λ est la longueur d'onde.

NOTE 7. On suppose dans ce qui suit que ξ , η , ζ sont de la forme φe^{kit} , où φ est fonction de x , y , z , mais non de t . Dans cette hypothèse les équations différentielles prendront la forme

$$A_2 \xi - \frac{\partial \theta}{\partial x} + l^2 \xi = 0,$$

$$A_2 \eta - \frac{\partial \theta}{\partial y} + l^2 \eta = 0,$$

$$A_2 \zeta - \frac{\partial \theta}{\partial z} + l^2 \zeta = 0.$$

Comme θ est nul, on voit facilement qu'on peut écrire

$$\xi_e = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \eta_e = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \zeta_e = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}.$$

Si l'on introduit ces quantités dans les équations (1), celles-ci prendront la forme

$$\frac{\partial(A_2 C + l^2 C)}{\partial y} - \frac{\partial(A_2 B + l^2 B)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial(A_2 A + l^2 A)}{\partial z} - \frac{\partial(A_2 C + l^2 C)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(A_2 B + l^2 B)}{\partial x} - \frac{\partial(A_2 A + l^2 A)}{\partial y} = 0.$$

On satisfait à ces équations de la manière la plus générale en posant

$$A_2 A + l^2 A = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$A_2 B + l^2 B = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$A_2 C + l^2 C = \frac{\partial u}{\partial z},$$

u étant une fonction arbitraire.

Mais, en posant

$$A = z \frac{\partial Q}{\partial y} - y \frac{\partial Q}{\partial z} + x S,$$

on aura en vertu des équations (10)

$$A_2 A + l^2 A = 2 \frac{\partial S}{\partial x},$$

et de la même manière

$$A_2 B + l^2 B = 2 \frac{\partial S}{\partial y},$$

$$A_2 C + l^2 C = 2 \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Les équations (1) sont donc satisfaites par les valeurs de A , B et C données par les équations (9). Reste encore à décider si ces solutions des équations (1) sont les plus générales. Mais on peut remarquer que ξ , η , ζ sont tous trois solutions de la même équation aux dérivées partielles, et qu'ils sont liés en outre par l'équation

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

par quoi l'on reconnaît qu'ils peuvent être exprimés par deux intégrales de l'équation $A_2 u + l^2 u = 0$, et que A , B , C étant exprimés par deux intégrales, indépendantes

l'une de l'autre, de cette équation, les expressions ξ , η , ζ sont vraisemblablement les solutions les plus générales des équations (1).

NOTE 8. On trouvera

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \left(x \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} + z \frac{\partial Q}{\partial z} \right)}{\partial x} - x \Delta_2 Q + z \frac{\partial S}{\partial y} - y \frac{\partial S}{\partial z} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \left(r \frac{\partial Q}{\partial r} \right)}{\partial x} - x \Delta_2 Q + z \frac{\partial S}{\partial y} - y \frac{\partial S}{\partial z},\end{aligned}$$

et la composante de la rotation sera

$$\begin{aligned}l_x &= \frac{\delta \zeta}{\delta y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = -z \frac{\partial (\Delta_2 Q)}{\partial y} + y \frac{\partial (\Delta_2 Q)}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \left(x \frac{\partial S}{\partial x} + y \frac{\partial S}{\partial y} + z \frac{\partial S}{\partial z} \right)}{\partial x} - x \Delta_2 S \\ &= -l^2 \left(y \frac{\partial Q}{\partial z} - z \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right)}{\partial x} - x \Delta_2 S.\end{aligned}$$

En remarquant encore que

$$\begin{aligned}\Delta_2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2},\end{aligned}$$

on obtiendra facilement l'expression donnée dans le texte.

NOTE 9. Comme on a $l = \frac{2\pi}{\lambda}$, a , a' , a , a' désignent des distances mesurées par les longueurs d'onde (divisées par 2π) comme unités.

NOTE 10. On déduit facilement au moyen de l'équation différentielle (21) que

$$v_{n+1} = -a^{n+2} \frac{d}{da} \frac{v_n}{a^{n+1}},$$

et comme $v_0 = \sin a$, on en conclut les relations (23). De la même manière on obtient les expressions (25), en remarquant que

$$w_{n+1} = -a^{n+2} \frac{d}{da} \frac{w_n}{a^{n+1}}$$

et que $w_0 = \cos a$.

NOTE II. On reconnaît facilement que, u_n étant l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2 u_n}{da^2} = \left(\frac{n(n+1)}{a^2} - 1 \right) u_n,$$

la fonction

$$u = \frac{\cos \psi}{a} \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi} u_n(a)$$

satisfait à l'équation

$$\begin{aligned}\Delta_2 u + l^2 u &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + l^2 u \\ &= l^2 \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2 (au)}{\partial a^2} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)}{\partial \varphi} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + u \right) = 0,\end{aligned}$$

et par suite que les expressions (29) satisfont aux équations

$$\begin{aligned}\Delta_2 K + l^2 K &= 0, \\ \Delta_2 S + l^2 S &= 0;\end{aligned}$$

mais il est bien possible que ces expressions ne soient pas les solutions les plus générales des deux équations qui peuvent (par un choix convenable des constantes) satisfaire à toutes les conditions aux limites.

NOTE 12. Les équations (32) ne peuvent pas directement être déduites des équations de condition.

Celles-ci donneront

$$(1) \frac{\partial \left(\frac{\partial \cdot a(K+K_0)}{a \partial a} \right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(S+S_0)}{\sin \varphi \partial \psi} = \frac{\partial \left(\frac{\partial(a'K')}{a' \partial a'} \right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial S'}{\sin \varphi \partial \psi},$$

$$(2) \frac{\partial \left(\frac{\partial \cdot a(K+K_0)}{a \partial a} \right)}{\sin \varphi \partial \psi} - \frac{\partial(S+S_0)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(\frac{\partial(a'K')}{a' \partial a'} \right)}{\sin \varphi \partial \psi} - \frac{\partial S'}{\partial \varphi},$$

$$(3) \frac{\partial \left(\frac{\partial \cdot a(S+S_0)}{\partial a} \right)}{\sin \varphi \partial \psi} - \frac{\partial \cdot a(K+K_0)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \left(\frac{\partial(a'S')}{\partial a'} \right)}{\sin \varphi \partial \psi} - \frac{\partial(a'K')}{\partial \varphi},$$

$$(4) \frac{\partial \left(\frac{\partial \cdot a(S+S_0)}{\partial a} \right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \cdot a(K+K_0)}{\sin \varphi \partial \psi} = \frac{\partial \left(\frac{\partial(a'S')}{\partial a'} \right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(a'K')}{\sin \varphi \partial \psi}.$$

En vertu des équations (26), (29), (30), on aura

$$K = \cos \psi \sum_1^{\infty} K_n \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi},$$

$$S = \sin \psi \sum_1^{\infty} S_n \frac{dP_n(\cos \varphi)}{d\varphi},$$

et les expressions analogues pour K_0, S_0, K', S' , les coefficients K_n et S_n étant indépendants de φ et ψ .

Si l'on pose

$$\frac{1}{a} \frac{d(aK_n)}{da} + \frac{1}{a} \frac{d(aK_{n,n})}{da} - \frac{1}{a'} \frac{d(a'K'_n)}{da'} = (K_n)$$

et

$$S_n + S_{0,n} - S'_n = (S_n),$$

où $K_{0,n}, K'_n, S_n, S_{0,n}, S'_n$ sont les coefficients analogues à K_n et S_n correspondants à K_0, K', S, S_0, S' , les équations (1) et (2) peuvent s'écrire

$$(5) \sum_1^{\infty} (K_n) \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} + \sum_1^{\infty} \frac{(S_n) dP_n}{\sin \varphi d\varphi} = 0,$$

$$(6) \sum_1^{\infty} \frac{(K_n) dP_n}{\sin \varphi d\varphi} + \sum_1^{\infty} (S_n) \frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} = 0.$$

Si l'on pose $\cos \varphi = x$, on aura

$$\frac{dP_n}{d\varphi} = -\sin \varphi \frac{dP_n}{dx}$$

et

$$\frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} = -x \frac{dP_n}{dx} + (1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} = x \frac{dP_n}{dx} - n(n+1) P_n,$$

et l'équation (5), en vertu de la relation

$$x \frac{dP_n}{dx} = n P_n + \frac{dP_{n-1}}{dx},$$

peut s'écrire

$$\sum_1^{\infty} (K_n) \left(\frac{dP_{n-1}}{dx} - n^2 P_n \right) - \sum_1^{\infty} (S_n) \frac{dP_n}{dx} = 0.$$

Par intégration entre les limites -1 et x , on obtiendra

$$\sum_1^{\infty} (K_n) \left(P_{n-1} - \frac{n^2}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1}) \right) - \sum_1^{\infty} (S_n) P_n + \sum_1^{\infty} ((-1)^n (K_n) + (-1)^n (S_n)) = 0.$$

Comme le coefficient de P_n doit être nul, on en déduit

$$(7) \frac{(n+2)^2}{2n+3} (K_{n+1}) - \frac{(n-1)^2}{2n-1} (K_{n-1}) - (S_n) = 0,$$

relation valable pour

$$n = 1, 2, \dots, \infty,$$

et

$$(8) \quad \frac{1}{3}(K_1) + \sum_2^{\infty} (-1)^n (K_n) + \sum_1^{\infty} (-1)^n (S_n) = 0.$$

Par intégration entre les limites x et 1, on aurait obtenu le terme constant

$$(9) \quad -\frac{1}{3}(K_1) + \sum_2^{\infty} (K_n) - \sum_1^{\infty} (S_n) = 0.$$

De même l'équation (6) donnera

$$(10) \quad \frac{(n+2)^2}{2n+3} (S_{n+1}) - (S_{n-1}) \frac{(n-1)^2}{2n-1} - (K_n) = 0,$$

$$(11) \quad \frac{1}{3}(S_1) + \sum_2^{\infty} (-1)^n (S_n) + \sum_1^{\infty} (-1)^n (K_n) = 0,$$

$$(12) \quad -\frac{1}{3}(S_1) + \sum_2^{\infty} (S_n) - \sum_1^{\infty} (K_n) = 0.$$

Des équations (8) et (11) on déduit

$$(K_1) - (S_1) = 0,$$

et des équations (9) et (12)

$$(K_1) + (S_1) = 0,$$

et par conséquent

$$(K_1) = 0, \quad (S_1) = 0.$$

Si dans les équations (7) et (10) on fait $n = 1$, on obtiendra

$$(K_2) = 0, \quad (S_2) = 0,$$

et l'on reconnaîtra que toutes les quantités (K_n) et (S_n) s'évanouissent, par où l'on voit qu'on aura

$$S + S' = S'' \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} \frac{\partial \cdot a(K_0 + K)}{\partial a} = \frac{1}{a'} \frac{\partial (a'K')}{\partial a'}.$$

Par un procédé analogue on pourra déduire la première et la quatrième équation (32) des équations (3) et (4).

Du reste on voit qu'on peut se passer des équations (32), les équations $(K_1) = 0$, $(S_1) = 0$, etc., donnant immédiatement les quatre équations d'où sont déduites les équations (33).

NOTE 13. v_n et w_n étant deux intégrales de l'équation

$$\frac{d^2 u}{da^2} = \left(\frac{n(n+1)}{a^2} - 1 \right) u,$$

on aura

$$v_n'' w_n - v_n w_n'' = 0$$

et

$$v_n' w_n - w_n' v_n = c,$$

c étant une constante. Si l'on pose $a = \infty$, on obtiendra

$$w_n = \cos\left(a - \frac{n\pi}{2}\right) = v_n',$$

$$v_n = -w_n' = \sin\left(a - \frac{n\pi}{2}\right),$$

et par conséquent

$$c = 1.$$

NOTE 14. Les expressions trouvées par Lorenz pour exprimer la moyenne de différentes fonctions ne peuvent être considérées que comme approximativement exactes et ne peuvent pas être démontrées avec rigueur, ce qu'on voit déjà par la définition des quantités ω .

Quant à la valeur de $\int_{\omega}^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx$, cette fonction peut, comme le dit Lorenz, si $0 < \mu < 1$, être développée en une série semi-convergente, à savoir

$$\int_{\omega}^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx = e^{\omega i} (i\omega^{\mu-1} - (\mu-1)\omega^{\mu-2} - i(\mu-1)(\mu-2)\omega^{\mu-3} \dots) \\ + i^{\mu-1}(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1) \int_{\omega}^{\infty} e^{\omega i} x^{\mu-n} dx.$$

Si ω est suffisamment grand, et que n ne le soit pas trop en comparaison de ω , la dernière intégrale peut être considérée comme négligeable. Considérons la valeur moyenne de $e^{\omega i} \omega^{-\mu}$, où μ est positif. Cette valeur est exprimée par

$$M = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{\omega i} \omega^{-\mu} d\omega}{\omega_2 - \omega_1},$$

où ω_1 et ω_2 sont tous deux des nombres très grands. Si l'on considère dans l'intégrale deux éléments pour lesquels ω diffère de π , la somme de ces deux éléments sera

$$e^{\omega i} (\omega^{-\mu} - (\omega + \pi)^{-\mu}) d\omega = \frac{\pi e^{\omega i} \mu}{\omega^{\mu+1}} d\omega$$

(approximativement). On voit qu'on peut dans l'expression de M considérer les limites de l'intégrale comme des multiples entiers de 2π , si $\omega_2 - \omega_1$ est suffisamment grand.

Mais alors on aura, si $\omega_1 = 2m_1\pi$, $\omega_2 = 2m_2\pi$,

$$M = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{\omega i} \omega^{-\mu} d\omega}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\int_{2m_1\pi}^{2m_2\pi} e^{\omega i} \omega^{-\mu} d\omega}{\omega_2 - \omega_1} \\ = \frac{\pi \mu \int_0^{\pi} ((2m_1\pi + h)^{-\mu-1} + (2(m_1+1)\pi + h)^{-\mu-1} \dots (2(m_2-1)\pi + h)^{-\mu-1}) e^{hi} dh}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Mais on obtiendra une valeur numériquement plus grande si l'on remplace e^{hi} par 1, et par conséquent

$$|M| < \left| \frac{\pi \sum_0^{m_2-m_1-1} \left(\frac{1}{(2(m_1+k)\pi)^\mu} - \frac{1}{(2(m_1+k+1)\pi)^\mu} \right)}{\omega_2 - \omega_1} \right|,$$

et comme on augmente l'inégalité en remplaçant

$$\frac{-1}{((2(m_1+k)+1)\pi)^\mu} \text{ par } \frac{-1}{(2(m_1+k+1)\pi)^\mu}$$

on aura

$$|M| < \frac{\pi \left(\frac{1}{\omega_1^\mu} - \frac{1}{\omega_2^\mu} \right)}{\omega_2 - \omega_1},$$

quantité qui tend vers zéro si $\omega_2 - \omega_1$ est suffisamment grand. On reconnaît alors que la moyenne de $\int_{\omega}^{\infty} e^{xi} x^{\mu-1} dx$ est zéro si $0 < \mu < 1$.

Si, dans l'intégrale $\int_0^{\omega} e^{xi} x^{\mu-1} dx$, μ est plus grand que 1, on aura

$$\int_0^{\omega} e^{xi} x^{\mu-1} dx = \frac{e^{\omega i} \omega^{\mu-1}}{i} - \frac{(\mu-1)}{i} \int_0^{\omega} e^{xi} x^{\mu-2} dx.$$

Lorenz dit bien que la moyenne de $e^{\omega i} \omega^{\mu-1}$ s'évanouit; mais cela n'est pas exact, car on aura, si l'on nomme cette moyenne M ,

$$M = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{\omega i} \omega^{\mu-1} d\omega}{(\omega_2 - \omega_1)},$$

expression qui peut à l'aide d'intégrations par parties être développée en une série semi-convergente, dont les termes sont de la forme

$$\frac{c_p (e^{\omega_1 i} \omega_1^p - e^{\omega_2 i} \omega_2^p)}{\omega - \omega_2},$$

où c_p est une constante, et un reste de la forme $\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{\alpha x} x^{\mu-1} dx$, qui peut être négligé. Mais les termes de la série et par suite la série elle-même ne s'évanouissent pas en général.

NOTE 15. Tant n_1 que n_2 sont ici des quantités de la même nature que ω .

NOTE 16. La formule (40) ne peut en général être juste; car on a

$$\sum_{n_1}^{n_2} e^{\alpha n i} = \frac{e^{\alpha n_1 i} - e^{\alpha(n_2+1)i}}{1 - e^{\alpha i}},$$

et par conséquent, en différentiant par rapport à α ,

$$\sum_{n_1}^{n_2} n e^{\alpha n i} = \frac{n_1 e^{\alpha n_1 i} - (n_2 + 1) e^{\alpha(n_2+1)i}}{1 - e^{\alpha i}} + \frac{(e^{\alpha n_1 i} - e^{\alpha(n_2+1)i}) e^{\alpha i}}{(1 - e^{\alpha i})^2}.$$

Si l'on prend la moyenne de $\sum_{n_1}^{n_2} n e^{\alpha n i}$, le second terme s'évanouira, mais non pas le premier. La somme de la série (ou bien la moyenne de cette somme) est pourtant d'un ordre de grandeur plus petit que celui de chaque terme de la série en particulier.

NOTE 17. Cela présuppose que $\frac{I \cdot (n_2 - \nu)^2}{\alpha^2}$, $\frac{I \cdot (\nu - n_1)}{\alpha^2}$ sont tous deux des quantités très grandes.

NOTE 18. Voir la note 14.

NOTE 19. On a

$$\frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2} = - \int_0^{\omega} \cos(-\varepsilon x^{\frac{1}{2}} + x) dx$$

et

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\omega} x^{-\frac{2}{3}} \cos(-\varepsilon x^{\frac{1}{2}} + x) dx \\ &= \frac{3}{\varepsilon} \int_0^{\omega} \cos(-\varepsilon x^{\frac{1}{2}} + x) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3} x^{-\frac{2}{3}} - 1 \right) \cdot dx \\ &\quad + \frac{3}{\varepsilon} \int_0^{\omega} \cos(-\varepsilon x^{\frac{1}{2}} + x) dx \\ &= - \frac{3}{\varepsilon} \left| \sin(-\varepsilon x^{\frac{1}{2}} + x) \right|_0^{\omega} - \frac{3}{\varepsilon} \frac{d^2 Q}{d\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Mais d'après la définition des quantités ω le premier terme s'évanouit.

NOTE 20. Cela suppose que $\frac{G z_1^2}{a}$ est très grand.

NOTE 21. Cela suppose que $\sqrt{\frac{H}{a^3}} z_1^3$ est très grand.

NOTE 22. On a $G = \pm \mu \sqrt{\frac{2\pi H}{a}}$ et le module du terme où entre $\alpha^{\frac{1}{2}}$ est égal à

$$\frac{A}{4} \sqrt{\frac{a\pi}{H}} \sqrt{2(M_1^2 + N_1^2)}.$$

NOTE 23. On trouve la somme des séries dans lesquelles entre $P_n(-\cos \varphi)$ en remplaçant dans les formules (26) et (27) φ par $\varphi + \pi$.

NOTE 24. La série (66) peut être déduite de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 q_n}{da^2} + 4 \left(1 - \frac{n(n+1)}{a^2} \right) \frac{dq_n}{da} + \frac{4n(n+1)}{a^3} q_n = 0,$$

à laquelle satisfait q_n .

Pour la déduction de cette équation différentielle, voir la partie 6 de ce mémoire intitulée: Suite. Réflexion totale, diffraction.

NOTE 25. La formule (66) peut s'écrire

$$q_n = 1 + \frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}{a^2} \frac{1}{2} + \left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}{a^2} \right) \left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2}{a^2} \right) \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \\ + \left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}{a^2} \right) \left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2}{a^2} \right) \left(\frac{(n+\frac{1}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2}{a^2} \right) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$$

Si p est petit, les quantités

$$\left(\frac{1}{2} \right)^2, \left(\frac{3}{2} \right)^2, \dots, \left(\frac{2p+1}{2} \right)^2$$

sont elles-mêmes petites et peuvent être négligées, et si p est grand, le terme de q_n correspondant à cet indice sera lui-même petit. Mais, si l'on peut négliger les quantités $\left(\frac{1}{2} \right)^2, \left(\frac{3}{2} \right)^2, \dots$, l'expression représentera précisément $\left(1 - \left(\frac{n+\frac{1}{2}}{a} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$.

NOTE 26. On suppose dans ce qui suit que $q_n(\alpha)$ et $q_n(\alpha')$ peuvent être exprimées par la formule (67).

NOTE 27. Les séries sont des progressions géométriques dont la raison est $b_n e^{-2i\lambda_n(\alpha')}$ ou $c_n e^{-2i\lambda_n(\alpha)}$.

Comme q_n est positif, les valeurs de b_n et de c_n sont toujours plus petites que l'unité.

NOTE 28. Si l'on développe $b_{n,m}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{n+\frac{1}{2}}{a}$, on trouvera que le coefficient de $\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{a} \right)^2$ sera

$$\frac{(N-1)^m}{(N+1)^{m+2}} \left(N + \frac{1}{N} - 2(m+1) \right),$$

et d'une manière analogue que le coefficient de $\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{a} \right)^2$ dans $c_{n,m}$ sera

$$-\frac{(1-N)^m}{(1+N)^{m+2}} \left(N + \frac{1}{N} - 2(m+1) \right).$$

NOTE 29. L'exposant de e dans l'expression en question deviendra

$$kt \mp \frac{n\pi}{2} + \lambda_n(\alpha) - (2m+1)\lambda_n(\alpha') \pm \lambda_n(\alpha'),$$

et le coefficient de $\frac{\pi n}{2}$ sera $\mp 1 + 2m + 1$ correspondant à $-\lambda_n(\alpha')$, ou $\mp 1 + 2m - 1$ correspondant à $+\lambda_n(\alpha')$. Si $\beta_{n,m}$ ou $\gamma_{n,m}$ est développé en série suivant les puissances croissantes de $\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{a} \right)$, les coefficients de $\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{a} \right)^2$ deviendront

$$(\pm) \frac{2N(N-1)^m}{(N+1)^{m+1}} \left(\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{N^2} \right) - \frac{2m+1}{2N} \right),$$

(\pm) correspondant à $\gamma_{n,m}$ pour m impair ou pair.

NOTE 30. Si l'on suppose que $\nu + \frac{1}{2}$ désigne la distance d'un rayon incident à l'axe, on reconnaîtra que θ est l'angle d'incidence et θ' l'angle de réfraction, tandis que ϑ et ϑ' désignent les angles sous lesquels le rayon réfracté et réfléchi (une ou plusieurs fois) par la sphère coupe l'axe, ce qu'on voit facilement en remarquant que la distance du rayon au centre est toujours la même au dehors de la sphère, et qu'elle reste aussi constante à l'intérieur de la sphère.

Les développements suivants du mémoire prennent tous comme point de départ, qu'un terme de la série qui exprime le mouvement lumineux dont l'indice est ν , représente le rayon incident à la distance ν de l'axe, et

que la partie d'un terme d'indice n correspondante à $b_{n,m}$, etc., représente la partie du rayon réfléchi m fois.

NOTE 31. La valeur de l'amplitude est, d'après mes calculs, 21,326, elle de l'intensité 454,80.

NOTE 32. On reconnaît immédiatement que les dérivées par rapport à a des quantités qui n'entrent pas dans l'exposant seront d'un ordre de grandeur plus petit que celui des dérivées des quantités, qui entrent dans l'exposant. De même on voit, si l'on ne conserve que les termes d'ordre supérieur dans l'expression (79), qu'on peut négliger la partie de la dérivée par rapport à φ obtenue par différentiation de $\sqrt{\frac{2g_n(a)}{\pi n \sin \varphi}}$.

NOTE 33. Comme on peut admettre que $\frac{\partial(Fa)}{\partial \theta} = 0$, on aura

$$\frac{d(Fa)}{da} = \frac{\partial(Fa)}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{da} + \frac{\partial(Fa)}{\partial a}.$$

Mais

$$Fa = kt - \frac{\nu\pi}{2} - \lambda_\nu(a) + \phi,$$

où ϕ est composé de termes qui ne contiennent pas a , et par conséquent

$$\frac{dFa}{da} = -\frac{d\lambda_\nu(a)}{da} = -\cos \theta.$$

NOTE 34. φ ne figure dans Fa que par le terme $\pm(\nu + \frac{1}{2})\varphi$.

NOTE 35. Comme on sait par la théorie des fonctions Γ , on a

$$\Gamma(\mu) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} \left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu (1 + o),$$

où δ tend vers zéro, si μ croît infiniment. Par conséquent on a approximativement, si n est un grand nombre,

$$\begin{aligned} \frac{(2a)^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 4n+1} \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} &= \frac{(2a)^{2n+1} [\Gamma(2n+1)]^2}{\Gamma(4n+2) [\Gamma(n+1)]^2} \\ &= \frac{(2a)^{2n+1} \frac{2\pi}{2n+1} \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{4n+2}}{\sqrt{\frac{2\pi}{4n+2} \left(\frac{4n+2}{e}\right)^{4n+2}} \cdot \frac{2\pi}{n+1} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{2n+2}} \\ &= \frac{e(ae)^{2n+1}}{\sqrt{\pi(2n+1)} [2(n+1)]^{2n+1}}, \end{aligned}$$

expression qui, comme on voit, devient infiniment grande en même temps que n , si $\frac{ae}{2n+2} > 1$.

NOTE 36. Si $n + \frac{1}{2} - a$ est du même ordre de grandeur que a , $1 - \frac{a}{n + \frac{1}{2}}$ ne peut pas devenir nul ou très petit. Les deux limites de l'intégrale peuvent être regardées comme des quantités de la même nature que ω .

On voit en développant l'intégrale en série qu'elle peut être mise sous la forme d'une somme de termes tels que

$$A_m \int_{\omega_1}^{\omega_2} y^{m-1} \sin \left[\left(1 \pm \frac{a}{n + \frac{1}{2}} \right) \cdot y - \frac{\pi}{4} \right],$$

où m est un nombre entier et A_m une constante. Mais, d'après la formule (39), cette somme doit s'évanouir. (Voir pourtant la note 14.)

NOTE 37. On a

$$1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1) = \frac{\Gamma(2n+2) \Gamma(2n)}{2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma(n+1)}.$$

Si l'on se sert de la formule citée dans la note 35, on obtiendra l'expression donnée dans le texte.

NOTE 38. On reconnaît par la formule (66) ou (67) que, dans le cas cité, $v_n^2 + w_n^2$ n'est pas d'un ordre supérieur que l'unité. Par conséquent $v_n w_n$ ne peut pas être d'un ordre plus grand que l'unité.

NOTE 39. On suppose ici que n , $n-m$ et $n+m$ sont des nombres très grands. Dans cette hypothèse on peut appliquer la formule citée dans la note 35, et l'on obtiendra

$$\begin{aligned} & \frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n+m)}{a^{2m}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \dots 2m} \\ &= \frac{\Gamma(n+m+1) \Gamma(2m+1)}{2^{2m} a^{2m} \Gamma(n-m+1) [\Gamma(m+1)]^2} \\ &= \frac{e^{-2m+1} (n+m+1)^{n+\frac{1}{2}+m} (2m+1)^{2m+\frac{1}{2}}}{2^{2m+\frac{1}{2}} a^{2m} \sqrt{\pi} (n-m+1)^{n-m+\frac{1}{2}} (m+1)^{2m+1}}. \end{aligned}$$

Mais, comme $n+m+1$ est très grand, on aura

$$\begin{aligned} (n+m+1)^{n+\frac{1}{2}+m} &= (n+m+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}+m} \left(1 + \frac{(\frac{1}{2})}{n+m+\frac{1}{2}}\right)^{n+\frac{1}{2}+m} \\ &= (n+m+\frac{1}{2})^{n+m+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\begin{aligned} (n-m+1)^{n-m+\frac{1}{2}} &= (n-m+\frac{1}{2})^{n-m+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}}, \\ (2m+1)^{2m+\frac{1}{2}} &= (2m)^{2m+\frac{1}{2}} e, \\ (m+1)^{2m+1} &= m^{2m+1} e^2, \end{aligned}$$

où l'on voit pourtant que toutes ces expressions ne sont qu'approximatives. En introduisant ces valeurs dans l'expression trouvée ci-dessus, on obtiendra l'expression du mémoire.

NOTE 40. Les termes $\frac{m^3}{(n+\frac{1}{2})^4} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5}$, etc., de la série qui représente $F(m)$ sont ici négligés. Cela sera

permis, si l'on peut supposer que l'ordre de grandeur de m soit inférieur à celui de n . Mais, comme on le voit, les termes de la série (66) deviennent très petits, si l'ordre de grandeur de la quantité m s'approche de celui de n .

NOTE 41. Mes calculs donnent 0,5172.

NOTE 42. Pour vérifier les formules (105) et (106), il est nécessaire de former le produit et la somme des carrés des séries qui figurent dans leurs seconds membres. On voit immédiatement que les résultats de ces opérations seront des séries procédant suivant les puissances croissantes de ε . Si nous formons $v_n(a) w_n(a)$, le coefficient de ε^{3q} sera

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} e^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(q+\frac{1}{3})}{1! 3q!} + \frac{\Gamma(\frac{4}{3}) \Gamma(q-1+\frac{1}{3})}{3! 3(q-1)!} + \dots \right].$$

Nous appellerons K_{3q} la série entre crochets et nous chercherons à sommer cette série.

On a, comme on sait,

$$\frac{\Gamma(n) \Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = \int_0^{\infty} \frac{\xi^{n-1} d\xi}{(\xi+1)^{n+m}}$$

(le second membre étant la fonction eulérienne désignée par B), et par conséquent

$$K_{3q} = \frac{\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!} \int_0^{\infty} \frac{(\xi^{q-1+\frac{1}{3}} + \xi^{q-2+\frac{1}{3}} \frac{3q!}{3q-3! 3!} + \xi^{q-3+\frac{1}{3}} \frac{3q!}{3q-6! 6!} + \dots)}{(\xi+1)^{q+\frac{2}{3}}}$$

Si a et \bar{a} désignent les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$K_{3q} = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(q+\frac{2}{3})}{3q!} \int_0^{\infty} \frac{\xi^{-\frac{2}{3}} [(\xi^{\frac{1}{3}}+1)^{3q} + (a\xi^{\frac{1}{3}}+1)^{3q} + (\bar{a}\xi^{\frac{1}{3}}+1)^{3q}] d\xi}{(\xi+1)^{q+\frac{2}{3}}},$$

expression qui peut être transformée en

$$K_{3q} = \frac{\Gamma(q + \frac{2}{3})}{3q!} \int_0^{\infty} \frac{[(x+1)^{3q} + (ax+1)^{3q} + (\bar{a}x+1)^{3q}] dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}},$$

ou, sous une forme plus condensée,

$$(1) \quad K_{3q} = \frac{\Gamma(q + \frac{2}{3})}{3q!} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma(ax+1)^{3q} dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}}.$$

En intégrant par parties, on en déduit

$$(2) \quad K_{3q} = \frac{\Gamma(q + \frac{2}{3})}{3q!} \frac{3q+2}{3q+1} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma \bar{a}x^2(ax+1)^{3q+1} dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}},$$

et, en remplaçant x par $\frac{1}{x}$,

$$(3) \quad K_{3q} = \frac{\Gamma(q + \frac{2}{3})}{3q!} \frac{3q+2}{3q+1} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma(ax+1)^{3q+1} dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}}.$$

En additionnant ces deux expressions, on obtient

$$(4) \quad 2K_{3q} = \frac{\Gamma(q + \frac{2}{3})}{3q!} \frac{3q+2}{3q+1} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma(ax+1)^{3q+1}(\bar{a}x^2+1) dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}}$$

$$= 3(3q+2)(3q+3)K_{3q+1} - \frac{2\Gamma(q + \frac{2}{3})}{3q!} \frac{3q+2}{3q+1} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma ax(ax+1)^{3q+1} dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}},$$

ou bien

$$(5) \quad 3K_{3(q+1)} \cdot (3q+2)(3q+3) = \frac{2\Gamma(q + \frac{2}{3})}{3q!} \frac{3q+2}{3q+1} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma ax(ax+1)^{3q+1} dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}},$$

ce qu'on voit en remplaçant dans le premier membre de l'équation (4) K_{3q} par l'expression (2). On aura par conséquent

$$(6) \quad K_{3(q+1)} = \frac{2\Gamma(q+1 + \frac{2}{3})}{3(q+1)!} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma ax(ax+1)^{3q+2} dx}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2\Gamma(q+1 + \frac{2}{3})}{3(q+1)!} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma(ax+1)^{3q+2} dx}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}},$$

où la dernière expression s'obtient en remplaçant x par $\frac{1}{x}$. Par conséquent on aura

$$(7) \quad K_{3q} = \frac{2\Gamma(q + \frac{2}{3})}{3q!} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma(ax+1)^{3q-1} dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}}},$$

et, après intégration par parties,

$$(8) \quad K_{3q} = \frac{2\Gamma(q + \frac{2}{3})}{3q!} \frac{3q+2}{3q} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma \bar{a}x^2(ax+1)^{3q} dx}{(x^3+1)^{q+\frac{2}{3}+1}}$$

$$= \frac{2\Gamma(q + \frac{2}{3})}{3q!} \frac{3q+2}{3q} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma ax(ax+1)^{3q} dx}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}};$$

par où l'on obtient, en ajoutant la première expression au double de la seconde,

$$(9) \quad K_{3q} = \frac{2\Gamma(q+1 + \frac{2}{3})}{3q! 3q} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma(ax+1)^{3q+2} - \Sigma(ax+1)^{3q} dx}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2\Gamma(q+1 + \frac{2}{3})}{3q! 3q} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma ax(ax+1)^{3q+2} - \Sigma x^3(ax+1)^{3q} dx}{(x^3+1)^{q+1+\frac{2}{3}}},$$

et, en additionnant de nouveau ces deux expressions,

$$(10) \quad 2K_{3q} = \frac{2K_{3(q+1)}}{3q} (3q+1)(3q+2)(3q+3) - \frac{2(q + \frac{2}{3})}{3q} K_{3q}$$

$$(11) \quad K_{3(q+1)} = \frac{(4q + \frac{2}{3})K_{3q}}{(3q+1)(3q+2)(3q+3)}.$$

Mais on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right),$$

et on reconnaît alors facilement que

$$\begin{aligned} K_{3q} &= \frac{4^q (q-1+\frac{1}{6})(q-2+\frac{1}{6}) \dots \frac{1}{6} \Gamma(\frac{1}{3})^2}{3^q q!} \\ &= \frac{4^q 2^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \Gamma\left(q+\frac{1}{6}\right)}{3^q q!}. \end{aligned}$$

D'une manière analogue on peut sommer les autres séries, qui représentent dans $v_n w_n$ et dans $v_n^2 + w_n^2$ les coefficients des puissances de ε .

NOTE 43. On fait ici l'hypothèse que

$$a > n + \frac{1}{2} > a'.$$

NOTE 44. Les termes de la série qui représente $\lambda_n(a)$ seront de la forme

$$\frac{A_m z^m}{a^{m-1}},$$

tandisque les termes des séries qui représentent δ ou Δ seront de la forme

$$\frac{B_m z^m}{a^m}$$

où A_m et B_m sont indépendants de a .

NOTE 45. Dans ce qui suit on présuppose que l'équation (68) est valable pour la variable a .

NOTE 46. $q_n(a)$ croît toujours en même temps que n , ce qu'on reconnaît par l'équation (66). Si $a - (n + \frac{1}{2})$ est positif et d'un ordre de grandeur supérieur à celui de $a^{\frac{1}{3}}$, q_n

peut être exprimé par

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - (n + \frac{1}{2})^2}}.$$

Par conséquent $q_n(a)$ sera d'un ordre plus grand que l'unité, si $a - n < a^{\frac{2}{3}}$, où $\frac{2}{3}$ est une fraction proprement dite.

NOTE 47. En vertu de l'équation (63), λ_n est nul pour $a = 0$, et en vertu de l'équation (64)

$$\lambda_n = \int_0^a \frac{da}{q_n}.$$

Mais comme q_n croît rapidement avec n , si $n > a$, on voit que λ_n décroît très vite avec la même quantité.

NOTE 48. Voir le développement qui suit dans le texte.

NOTE 49. On obtient cette expression en remplaçant la sommation de la série par une intégration.

NOTE 50. Je ne puis reconnaître la légitimité du raisonnement de Lorenz. Mais l'ordre de grandeur de r étant celui de $a^{\frac{1}{3}}$, l'ordre de r' sera celui de $a^{-\frac{2}{3}}$, et dans l'expression

$$\mu_{\nu+1}(a) = \mu_{\nu}(a) + \frac{z}{2r} - \frac{r'}{2r^2} \frac{z^2}{1 \cdot 2} \dots$$

le second terme sera du même ordre que $a^{-\frac{1}{3}}$, et, comme on le reconnaît facilement, le résultat de Lorenz subsiste néanmoins.

NOTE 51. Les expressions citées sont les coefficients de $\bar{k}_n \bar{k}_m$, $\bar{s}_n \bar{s}_m$ ou de $\bar{k}_n \bar{s}_m$. On voit immédiatement que

$$\int_0^\pi d\varphi \left(\frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \frac{dP_m}{d\varphi} + \frac{dP_n}{d\varphi} \frac{d^2 P_m}{d\varphi^2} \right) = \left[\frac{dP_n}{d\varphi} \frac{dP_m}{d\varphi} \right]_0^\pi = 0.$$

Comme on sait, la fonction $P_n(\cos \varphi)$ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} + \cot \varphi \frac{dP_n}{d\varphi} + n(n+1)P_n = 0.$$

Par conséquent on aura

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin \varphi \left(\frac{d^2 P_n}{d\varphi^2} \frac{d^2 P_m}{d\varphi^2} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{dP_n}{d\varphi} \frac{dP_m}{d\varphi} \right) d\varphi \\ &= \int_0^\pi \sin \varphi \left[\left(\cot \varphi \frac{dP_n}{d\varphi} + n(n+1)P_n \right) \left(\cot \varphi \frac{dP_m}{d\varphi} + m(m+1)P_m \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{dP_n}{d\varphi} \frac{dP_m}{d\varphi} \right] d\varphi. \end{aligned}$$

Si l'on pose $\cos \varphi = x$, cette expression peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left[\left(x \frac{dP_n}{dx} - n(n+1)P_n \right) \left(x \frac{dP_m}{dx} - m(m+1)P_m \right) + \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_m}{dx} \right] dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \left[(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_m}{dx} - n(n+1)xP_n \frac{dP_m}{dx} - m(m+1)xP_m \frac{dP_n}{dx} \right. \\ & \quad \left. + n(n+1)m(m+1)P_n P_m + 2 \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_m}{dx} \right] dx. \end{aligned}$$

Si l'on pose $n > m$, tous les termes de cette expression s'évanouiront, à l'exception de

$$\int_{-1}^{+1} \left(-m(m+1)xP_m \frac{dP_n}{dx} + 2 \frac{dP_n}{dx} \frac{dP_m}{dx} \right) dx,$$

à cause de la relation bien connue $\int_{-1}^{+1} P_n dx = 0$, si f_m est un polynôme entier, de degré inférieur à celui de P_n . Mais cette expression est égale à

$$\left[-m(m+1)xP_m P_n + 2P_n \frac{dP_m}{dx} \right]_{-1}^{+1}$$

Mais

$$-m(m+1)xP_m + 2 \frac{dP_m}{dx}$$

s'évanouit tant pour $x = +1$ que pour $x = -1$, en vertu de la relation

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_m}{dx^2} - 2x \frac{dP_m}{dx} + m(m+1)P_m = 0.$$

Si $n = m$, en se servant de la relation

$$x \frac{dP_n}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx} = nP_n,$$

on aura

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left[\left(x \frac{dP_n}{dx} - n(n+1)P_n \right)^2 + \left(\frac{dP_n}{dx} \right)^2 \right] dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{dP_{n-1}}{dx} - n^2 P_n \right)^2 + \left(\frac{dP_n}{dx} \right)^2 \right] dx \\ &= \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{dP_{n-1}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dP_n}{dx} \right)^2 + n^4 P_n^2 \right] dx \\ &= \left[P_{n-1} \frac{dP_{n-1}}{dx} \right]_{-1}^{+1} - \left[P_n \frac{dP_n}{dx} \right]_{-1}^{+1} + \frac{2n^4}{2n+1} \\ &= n(n+1) + n(n-1) + \frac{2n^4}{2n+1} = \frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1}. \end{aligned}$$

NOTE 52. Cela implique la supposition que N est très grand, supposition qui est faite à la fin du mémoire „Théorie de la dispersion“.

NOTE 53. On suppose ici que la lumière transformée (émise) par le système de sphères est absorbée par

ce système, hypothèse dont l'admissibilité est très douteuse. Mais, quand bien même cette hypothèse serait admissible, on ne peut pas admettre que chaque sphère d'un système composé de plusieurs couches absorbe la même quantité de lumière.

NOTE 54. a' est ici très grand en comparaison de a et par suite N est très grand.

NOTE 55. Les expressions de p_n et q_n ne sont pas tout à fait exactes. On a

$$p_n = \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1)}{a^{2n+1}} \frac{a' v'_n(a') + N^2 n v_n(a')}{a' v'_n(a') - N^2 (n+1) v_n(a')},$$

et si λ est une racine de l'équation $p_n = 0$, la valeur de p_n pour $\lambda + \delta$, δ étant très petit, sera

$$p_n = - \left[\frac{dp_n}{d\lambda} \right] \frac{a' \delta}{\lambda}.$$

Lorenz suppose que N est constant, quoiqu'on ne puisse savoir s'il en est ainsi en réalité, et qu'on doit plus correctement supposer que N est une fonction de λ . Dans l'hypothèse de Lorenz, on a

$$p_n = - \left[\frac{a' v'_n(a') + a'^2 v''_n(a') + a' N^2 n v'_n(a')}{a' v'_n(a') - N^2 (n+1) v_n(a')} \right] \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1)}{a^{2n+1}} \cdot \frac{\delta}{\lambda}.$$

Mais en vertu des équations

$$a' v'_n(a') + N^2 n v_n(a') = 0$$

et

$$v''_n(a') = \left(\frac{n(n+1)}{a^2} - 1 \right) v_n(a'),$$

les quantités $v'_n(a')$ et $v''_n(a')$ peuvent être éliminées de p_n , et on obtiendra

$$p_n = \left[-n + \frac{n(n+1)}{N^2} - \frac{a^2}{N^2} - n^2 N^2 \right] \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 \delta}{a^{2n+1} \lambda},$$

mais comme $\frac{a^2}{N^2} = a^2$, on peut négliger ce terme et le résultat sera

$$p_n = - \frac{N^2 - 1}{N^2} \left[n(n+1) + n^2 N^2 \right] \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 \delta}{a^{2n+1} \lambda}.$$

La formule (112) peut être employée à calculer la valeur de q_n . On aura

$$\begin{aligned} q_n &= - \frac{\partial a}{\lambda} \left[\frac{-w''_n(a) v_n(a') + N^2 w_n(a) v''_n(a')}{N v_n(a) v'_n(a') - v'_n(a) v_n(a')} \right] \\ &= - \frac{\partial a}{\lambda} \left[\frac{v_n(a') w_n(a) (1 - N^2)}{N v_n(a) v'_n(a') - v'_n(a) v_n(a')} \right]. \end{aligned}$$

Mais comme a' est racine de l'équation

$$a N v'_n(a') + n v_n(a') = 0,$$

on obtiendra facilement, en négligeant les puissances supérieures de a ,

$$q_n = \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2}{a^{2n-1}} (1 - N^2) \frac{\delta}{\lambda}.$$